RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1904.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisiologia. — *Esperienze fatte sulle scimmie colla depressione barometrica.* Nota del Socio A. Mosso [1].

Avrei desiderato sperimentare sulle scimmie più vicine all'uomo per studiare gli effetti della depressione barometrica; ma per mancanza di mezzi, dovetti contentarmi di un *Papio anubis* venuto dall'Eritrea e continuai le esperienze già iniziate sul *Macacus sinicus* [2] portandone una coppia, maschio e femmina, sul Monte Rosa.

In una prima serie di esperienze produssi rapidamente forti depressioni per vedere quali fenomeni presentavano le scimmie in condizioni simili a quelle degli aereonauti, quando con una rapida ascensione arrivano nelle regioni più elevate dell'atmosfera; e nell'altra serie studiai sulle scimmie l'azione di un soggiorno prolungato sul Monte Rosa a 4560 m. e feci le analisi del sangue.

Il *Papio anubis* che mi servì per questi studî è un animale giovane, di sesso maschio che vive da circa sei mesi nel laboratorio: pesa cinque chilogrammi ed è alto $0^m,65$. Questa scimmia è molto intelligente e tanto domestica che vuole sempre avere vicino qualcuno. Cominciai le esperienze dopo che stava da tre mesi nel Laboratorio, dove la tenevamo sempre in una stanza riscaldata oltre i 20°.

(1) Presentata nella seduta del 21 febbraio 1904.

(2) A. Mosso, *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi.* 2ª ed., pag. 338.

Per mostrare il metodo che seguii in queste esperienze colle rapide e forti depressioni ne riferisco una come esempio. L'animale veniva messo sotto una grande campana di vetro della capacità di cinquanta litri che ha il bordo inferiore bene smerigliato. Con un poco di grasso, questa campana poggiando sopra una tavola di marmo, chiude ermeticamente. Nel collo tre grossi tubi sono chiusi ciascuno con un tubo di gomma, le pareti del quale avevano lo spessore di 2,5 mm. e il diametro interno di 6 mm. Un tubo corto era chiuso da una pinzetta a vite per regolare l'entrata dell'aria; un altro tubo faceva comunicare la cavità della campana con un manometro ad U pieno di mercurio; il terzo tubo andava alle pompe. Queste erano due: ad ogni colpo di stantuffo ciascuna estraeva circa due litri di aria, e tutte due insieme messe in movimento dal motore elettrico facevano 120 colpi al minuto; cosicchè lasciando il tubo di accesso dell'aria aperto si otteneva una ventilazione di circa 240 litri di aria al minuto; e chiudendolo leggermente, subito cominciava la depressione nell'interno della campana rimanendo la ventilazione abbondante. Chiudendo l'accesso dell'aria in 50 secondi, la pressione barometrica scendeva a 220 mm.

Le scimmie, come i cani e l'uomo, giungono rapidamente a grandi altezze in condizioni discrete, ma peggiorano nel primo momento che sono sottoposte alle forti depressioni e dopo breve tempo tornano a migliorare.

Questi mutamenti nelle funzioni del cervello e del sistema nervoso sono importanti, non solo perchè servono a spiegarci dei fenomeni che si erano osservati confusamente negli aereonauti, ma perchè ci fanno meglio comprendere la differenza che vi è fra l'anossiemia e l'acapnia.

ESPERIENZA 1ª.

Papio anubis pressione barometrica 730 mm. Temp. della stanza 20°.

Esaminiamo attentamente i polmoni col dott. Herlitzka: io tengo in braccio l'animale che si diverte a cercare fra i peli della mia barba come fanno le scimmie fra loro. Risulta che a sinistra il polmone è normale, mentre che a destra in seguito alle esperienze precedenti fatte 2 giorni prima colle forti depressioni, vi è un leggiero soffio bronchiale in alto; il murmure vescicolare è bene distinto e normale in basso. Frequenza del respiro 54 in 1 minuto. La scimmia è ancora digiuna. Messa sotto la campana da circa un minuto incomincia la depressione.

Ore 2,20′, in 55 secondi arriva a 220 mm.

Ho scelto questa depressione perchè è quella alla quale giunsero Berson e Süring nella loro recente ascensione fatta coll'aereostato Preussen a Berlino il 31 luglio 1901 (1).

La scimmia sta seduta e non si muove.

In meno di un minuto è portata ad una depressione che corrisponde a 10000 metri.

La scimmia durante questa rapida depressione non si mosse; solo guardò intorno attenta come se succedesse qualche cosa; poi inchinò leggermente la testa. Aveva il pene

(1) R. Assmann und A. Berson, *Ergebnisse der Arbeiten am Aëronautischen Observatorium in den Jahren 1900, 1901.* Berlin 1902, pag. 229.

in erezione quando cominciò la rarefazione dell'aria e questa scomparve quando la scimmia raggiunse i 10000 metri.

Per un minuto stette discretamente bene in questa forte rarefazione: ma già aveva la faccia meno espressiva quando giunse ad 8000 metri.

Dopo un minuto alle ore 2,22′ cominciò ad oscillare sul tronco, e si appoggiò colle spalle alla campana come se fosse stanca. Era divenuta come stupida e indifferente, quando comparvero i primi sforzi di vomito. Passato un minuto e mezzo alle 2,22′30″ cade: si rialza e si sorregge colle mani, rimanendo accasciata sul fondo della campana.

Ore 2,24′. Respiro 72 in 1′, sta sempre male, ha gli occhi socchiusi; e spesso li chiude come se dormisse. La lingua non è azzurra, ma il pene è cianotico. Le orecchie sono un poco più pallide del normale. Vomita.

Ore 2,26′. Comincia a migliorare. Siede diritta e non tiene più la testa inclinata sul petto. Respiro 78 in 1′. Sonnecchia; ma il sonno è meno profondo.

Ore 2,27′. Sostiene la testa colle mani: di quando in quando alza la testa ed ha lo sguardo più intelligente. Respiro 84 in 1′: sempre superficiale. La pelle della faccia e delle orecchie non è cianotica, solo il glande del pene ha un colore azurrognolo, livido.

Ore 2,28′. La faccia è divenuta più espressiva; la scimmia cambia di posizione; i suoi movimenti sono più sicuri. La pressione si mantiene costante a 220 mm.

Ore 2,29′. Tiene bene gli occhi aperti, la sonnolenza è scomparsa: la scimmia si interessa a guardare e fissa l'orologio sul quale contiamo il respiro e stende la mano per toccarlo.

Ore 2,30′. Il miglioramento è evidente; è scomparsa la sonnolenza; ma la scimmia è sempre meno agile nei suoi movimenti.

Ora 2,31′. Incomincia la discesa e scendiamo lentamente allo zero del manometro. Sollevata la capanna la scimmia riprende subito il suo aspetto normale. Fatta l'ascoltazione troviamo che a destra il soffio bronchiale è più intenso e più esteso; che esso comparve pure in basso dove prima non esisteva. In tutto l'ambito dei polmoni anche a sinistra il murmure vescicolare è meno intenso.

In questa scimmia abbiamo veduto che la depressione barometrica agisce prima sul cervello che sul midollo allungato, perchè scemò l'intelligenza, e comparve il sonno senza che siasi modificata notevolmente la funzione del respiro in modo da far comparire la dispnea.

In una prossima Nota pubblicherò delle esperienze analoghe fatte sopra me stesso, che diedero i medesimi risultati. L'azione sul cervello in questa scimmia è evidentissima, perchè essa rimane immobile, mentre la pressione barometrica scende rapidamente a 220 mm.

La sua faccia perde a poco per volta la vivacità dell'espressione: per mezzo minuto rimane attenta, giunta ad 8000 metri diviene come istupidita ed impassibile; le palpebre si socchiudono, il tronco oscilla, la scimmia si appoggia come se fosse stanca, la testa cade sul petto ed incomincia il sonno. Qualche volta la scimmia si destava per vomitare e nessun altro sintomo, tranne la debolezza dei moti muscolari, comparve in questo primo periodo, che talora abbiamo prolungato per più di mezz'ora, vedendo cessare il vomito e la sonnolenza.

I fenomeni osservati nell'uomo durante le ascensioni aereostatiche a grandi altezze, possono dunque riprodursi ed analizzarsi meglio nelle espe-

rienze fatte sulle scimmie. Le descrizioni che leggiamo negli scritti di Tissandier, di Berson e Süring ed altri, corrispondono esattamente a quanto si osserva nelle scimmie. È una lenta paralisi che sopraggiunge; la coscienza e la volontà si offuscano, come se la depressione barometrica agisse unicamente col deprimere le funzioni della corteccia cerebrale, e prima, o dopo, si osserva un'alterazione che si estrinseca per mezzo del vomito. Il sonno e l'abbattimento insieme alla cessazione dei fenomeni psichici, sono i fatti che più si impongono.

Un fatto importante risulta da questa ed altre esperienze simili, ed è, che le rapide depressioni fino a 10,000 metri compiute in meno di un minuto, non recano alcun disturbo notevole alla respirazione. Come in altre esperienze fatte prima, lo stato dell'animale peggiora rapidamente nei due o tre minuti dopo aver raggiunto il massimo della depressione. Passati cinque o sei minuti, succede un miglioramento notevole sebbene la pressione barometrica non cambi. Abbiamo osservato il medesimo fatto nei cani ed abbiano supposto, secondo le ultime ricerche di Rosenthal, che gli animali abbiamo delle provviste di ossigeno nel sangue e nelle cellule dei tessuti, che consumano quando diminuisce la pressione barometrica.

È probabile che la circolazione sia meno attiva, perchè vedemmo comparire la cianosi nel ghiande. Certo nei polmoni vi fu un disturbo della circolazione: e dall'esame fatto si deve supporre che siano diventati iperemici.

Queste esperienze per essere complete dovrebbero farsi coll'analisi dell'aria espirata, per decidere, se vennero consumate le provviste dell'ossigeno contenute nel sangue, o se pure anche i tessuti vi contribuiscono coll'ossigeno intracellulare. Si dovrà per tale intento fare anche l'analisi del sangue, ma io non ebbi ancora il tempo per accingermi a questo studio.

Dirò fra poco come possa spiegarsi il miglioramento che osservammo dopo cinque o sei minuti che la scimmia trovavasi nell'aria fortemente rarefatta. Ora vorrei fissare l'attenzione del lettore sulle differenze che presentano i fenomeni qui osservati coi fenomeni caratteristici dell'anossiemia, e dell'avvelenamento per ossido di carbonio; il quale argomento ho già trattato in uno scritto speciale (1).

La perdita della coscienza ed il vomito sono due fatti che vediamo prodursi egualmente nell'anossiemia provocata tanto colla depressione barometrica quanto coll'ossido di carbonio. Vi è però una differenza fra queste due forme di asfissia ed è che nella depressione barometrica manca l'azione eccitante che per l'ossido di carbonio fu studiata da mio fratello sull'uomo (2).

(1) A. Mosso, *La rassemblance du mal de montagne avec l'empoissonement par l'oxyde de carbone.* Archiv. ital. de Biologie, Tome XXXV, pag. 51.

(2) U. Mosso, *Expériences avec l'oxyde de carbone faites sur l'homme.* Archives ital. Biol., Tome XXXV, pag. 1.

Le esperienze fatte dal dott. A. Herlitzka (1) nel mio laboratorio, mostrarono che nell'amministrazione rapida dell'ossido di carbonio il sistema nervoso presenta fenomeni diversi da questi che vedemmo prodursi nella rapida depressione barometrica. Irritando la corteccia cerebrale con una corrente elettrica mentre si amministrava l'ossido di carbonio, Herlitzka vide comparire un aumento dell'eccitabilità nella fase che corrisponde alla respirazione dispnoica.

Siccome alcuni ammettono che l'ossido di carbonio non agisca colla semplice produzione dell'anossiemia, ricorderò le esperienze fatte recentemente da Max Verworn (2), il quale studiando l'eccitazione dispnoica del vago, vide che la mancanza dell'ossigeno produceva una eccitazione. Non volendo ammettere che la sottrazione dell'ossigeno possa agire come un eccitamento sui centri del midollo allungato, Verworn ammise che l'azione di questo stimolo si faccia per via indiretta e sia un'azione secondaria.

Le esperienze sul *Papio anubis* ora riferite avendo confermato i risultati delle altre esperienze che pubblicai nel libro *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, dove si vide in tre scimmie diverse comparire il sonno e la perdita della coscienza senza che precedesse un'azione eccitante, dobbiamo conchiudere che la depressione barometrica non agisce come l'anossiemia, e che l'azione sua è diversa da quella dei narcotici, che sempre eccitano il sistema nervoso prima che succeda la depressione, il sopore e l'insensibilità.

Questa mancanza proviene forse dal fatto, che nella rapida depressione barometrica agisce non solo l'anossiemia prodotta dalla deficienza dell'ossigeno, ma anche l'acapnia che per mezzo della mancanza dell' anidride carbonica produce una depressione più intensa del sistema nervoso.

Questo *Papio anubis* sottoposto in giorni differenti alle stesse rapide e fortissime depressioni non presentava sempre la medesima resistenza, ma alcune volte giungeva alle stesse altitudini in condizioni migliori, ed altre volte mostravasi più sofferente: così che capitò qualche volta, senza che ne conoscessimo la causa, di vederlo cadere in uno stato inquietante ad un'altitudine di solo 8000 metri. La stessa cosa succede nell'uomo, e lo dimostrerò con delle esperienze fatte sopra me stesso, nelle quali una volta ebbi uno svenimento a solo 6000 metri, mentre come ho già pubblicato nel mio libro, *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, potei un'altra volta giungere senza alcun inconveniente fino all'altezza di 11,650 metri, che è la maggiore depressione barometrica toccata fino ad ora dall'uomo (3).

(1) A. Herlitzka, *Action de l'oxide de carbone sur le système nerveux*. Archives ital. de Biologie, Tome XXXIV, pag. 416.

(2) Max Verworn, *Zur Analyse der dispnoischen Vagusreizung*. Archiv. f. Anat. und. Physiologie, 1903, pag. 66.

(3) A. Mosso, *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, pag. 395.

In una prossima Nota raccoglierò tutti gli accidenti che osservai sopra sopra di me, dei miei amici e conoscenti nella lunga serie di esperienze fatte nella camera pneumatica.

Le alterazioni polmonari
in seguito alle forti depressioni barometriche.

Il prof. Kronecker ha riassunto le molteplici ed interessanti osservazioni da lui fatte sul male di montagna in una preziosa monografia, nella quale sostenne che il male di montagna dipende da un disturbo della circolazione polmonare prodotto dalla diminuita pressione barometrica (1).

L'esame dei polmoni fatto coll'ascoltazione e la percussione in questa scimmia (e lo si vedrà meglio nelle scimmie della Nota seguente), dimostra che colla rarefazione dell'aria si produce sempre un'alterazione dei polmoni; specialmente quando la depressione è abbastanza intensa da turbare le funzioni del sistema nervoso: e questa alterazione dei polmoni può da sola diventare causa di altri gravi disturbi. Le alterazioni polmonari che si osservano nel male di montagna, sono per la natura loro simili a quelle che osservai nell'avvelenamento per ossido di carbonio (2); ed esse possono prodursi anche senza la depressione barometrica, rarefacendo l'aria per mezzo dell'idrogeno. I disturbi della circolazione polmonare, se sono un fattore del male di montagna, non sono certo la causa dei fenomeni che abbiamo descritto nelle pagine precedenti che riguardano essenzialmente il sistema nervoso. Infatti sappiamo dalle esperienze di Lichtheim (3), che chiudendo una parte considerevole dei lobi polmonari alla penetrazione della corrente sanguigna dell'arteria polmonare, basta la rimanente parte anche molto piccola perchè passi la stessa quantità di sangue. Questa facilità grande della circolazione a traverso i polmoni, arriva al punto che secondo Lichtheim si possono chiudere tre quarti delle vie che percorre il sangue delle arterie polmonari, senza che diminuisca la pressione sanguigna nel sistema dell'aorta.

Vedremo nella seguente esperienza che in ripetute depressioni barometriche i fenomeni diventarono sempre meno gravi, così che si dovette portare successivamente la scimmia ad una rarefazione dell'aria maggiore per ottenere i medesimi effetti.

Ora in questa esperienza si può ritenere che le condizioni polmonari diventassero nelle tre esperienze successivamente meno buone, mentre invece la scimmia mostravasi più resistente alle depressioni che facemmo sempre più forti per tre volte l'una dopo l'altra.

(1) H. Kronecker, *Die Bergkrankheit.* Urban et Schwarzenberg, 1902, pag. 122.

(2) A. Mosso, *Comment agissent sur les poumons l'oxyde de carbone et l'air raréfié.* Archives ital. de Biologie, Tome XXXIV, 1901, pag. 99.

(3) Lichtheim, *Die Störungen des Lungenkreislaufs und ihr Einfluss auf den Blutdruck.* Berlin, 1876, pag. 65.

ESPERIENZA 2ª.

Papio anubis. Pressione barometrica 738 mm. Temperatura della stanza 16°,5.

Prima decompressione.

La scimmia fuori della campana fa 54 a 60 respirazioni al minuto. Esaminammo prima coll'ascoltazione diligente i polmoni per assicurarci che sono normali.

Ore 2,10′. Si mette la scimmia sotto la grande campana. Quando comincia la depressione alza le mani verso il tubo donde penetra l'aria.

Ore 1,24′. Pressione = 418 mm. fa 44 respirazioni al minuto, l'animale è tranquillo.

Ore 2,17′. Pressione 390 mm. La scimmia sta attenta, il suo aspetto è normale.

Ore 18′. Pressione 330 mm. Sbadiglia non è più tanto allegra. Respiro superficiale 48 im 1′. Allunga le labbra come se avesse nausea e poi succede uno sforzo di vomito.

Ore 19′. Pressione 318 mm. Si appoggia alle pareti della campana, è sonnolento.

Ore 21′. Pressione 278 mm. Gira sonnolento e cambia di posizione sotto la campana. Vomita ripetutamente.

Ore 2,22′. Pressione 268 mm. Sta male. La testa gli cade sul petto. Oscilla; è sonnolento tiene gli occhi chiusi, li apre svogliato quando picchiamo sulla campana chiamandolo. Respiro 52 in 1′. Lo manteniamo a questa pressione fino alle

Ore 2,28′. Vediamo che l'animale ha migliorato ed ora sembra meno abbattuto. Si conferma quanto abbiamo osservato nell'esperienza precedente e nei cani, che lo stato peggiora nel principio e dopo gli animali si rimettono alquanto.

Teniamo l'animale per 20 minuti alla pressione di 268 mm. che corrisponde all'altitudine di 8300 m. Il respiro oscilla fra 52 e 54 al minuto e presenta nulla di anormale. La scimmia gira per la campana e sembra molto abbattuta.

Ore 2,48′. Incomincia il ritorno alla pressione normale; a 378 mm., la scimmia è già più allegra. Respiro 60 al minuto.

Ore 2,55′. Pressione ordinaria; levata la scimmia è vivace molto e non presenta nulla di anormale. Solo esaminando i polmoni si riscontra una diminuzione del murmure vescicolare e dei soffi bronchiali che sono i sintomi dell'iperemia polmonare.

Seconda decompressione.

Facciamo poco dopo una seconda esperienza con decompressione più rapida, senza però chiudere completamente l'accesso dell'aria dall'esterno.

Ore 3,8′. La scimmia ha l'aspetto normale alla pressione di 538 mm.

Ore 3,10′. Si chiude l'accesso dell'aria e succede una rapida depressione barometrica. In due minuti e mezzo arriviamo a 258 mm.

Ore 3,12′30″. Appena giunti alla depressione di 258 mm. si stabilisce la corrente dell'aria e si mantiene ferma la pressione a quest'altezza. Il solo movimento che fece la scimmia fu di toccarsi le orecchie mentre la pressione diminuiva. Rimase collo sguardo fisso come inebetita e diventò sonnolenta. Fa 60 respirazioni al minuto, ma non più profonde delle normali. Il suo stato peggiora rapidamente si appoggia con una spalla alle pareti della campana e tiene la testa alquanto reclinata.

Ore 3,15′. Vomita. Sono stati necessarî circa 3 minuti perchè si produca il vomito che nella esperienza precedente comparve a 330 mm., ed ora a 258 mm.

Ore 3,16′. Vomita.

Ore 3,17′. Continua a vomitare e la scimmia ha un aspetto molto sofferente. Non aspettiamo oltre perchè migliori il suo stato ed avendo veduto come fosse alquanto cre-

sciuta la sua resistenza, scendiamo alla pressione ordinaria. Appena cresce la pressione interna per l'accesso maggiore dell'aria e si arriva a 278 mm. che corrisponde ad 8000 m. di altitudine, la scimmia mangia. A quest'altezza la scimmia nell'esperienza precedente stava male e vomitava alle ore 2,21′.

È dunque dimostrato che nella seconda depressione presenta una resistenza maggiore che nella prima, e ciò malgrado che abbiamo constatato l'iperemia dei polmoni.

Ore 3,20′. Pressione 478 mm. Giuoca e grida e si muove con aspetto normale.

Terza decompressione.

Ritornati alla pressione ordinaria. subito comincia un'altra decompressione.

Ore 3,25′. Si chiude l'accesso dell'aria e in 1 minuto la depressione giunge a 258 mm. cioè un centimetro meno di pressione della volta precedente. La scimmia sta seduta; appena comincia la depressione diviene più attenta come se sentisse succedere qualche cosa dentro di lei; ma non si mosse, nulla accenna ad un'azione eccitante nel cervello o nel midollo spinale. Fece solo un movimento della testa, come una scossa, causato probabilmente dalla rarefazione dell'aria nell'orecchio medio.

Ore 3,26′. Allunga le labbra, resta ferma e malinconica, poi chiude gli occhi ed abbassa la testa.

Ore 3,26′,30. Si appoggia colle spalle alle pareti della campana e sostiene il mento e la testa colle mani come se fosse stanca e sofferente.

Ore 3,29′. Respiro 28 in 30″. Movimenti del torace superficiali. La scimmia è immobile, ma sonnolenta. Chiamandola, percuotendo la campana, alza la testa e guarda.

Ore 3,32′. È sempre immobile e indifferente, ma sembra star meglio; grida e guarda intorno con curiosità.

Ore 3,34′. Sta sempre seduta ed appoggiata come se fosse stanca. Respiro 24 in 30″. Manteniamo sempre la pressione a 258 mm. con una forte ventilazione. La scimmia, sebbene si trovi in una depressione che corrisponde a più di 9000 metri di altitudine, è abbastanza in buone condizioni. Le mettiamo uno specchio davanti, essa guarda attenta e stende le mani per toccare l'imagine. Si stacca dalle pareti e cambia ripetutamente di posizione. Sembra meno abbattuta e stanca.

Ore 3,36′. Il miglioramento è notevole. Si conferma il fatto che dopo 10 minuti di una forte depressione sta meno male che non al principio.

Vediamo che essa sta molto meglio che nella prima e nella seconda depressione. Per conoscere quale sia ora la diminuzione di depressione che bisogna raggiungere perchè si produca la sonnolenza ed il vomito, si diminuisce alquanto l'accesso dell'aria, rimanendo pur sempre abbondante la ventilazione nella campana.

Ore 3,37′. Pressione = 218 mm.

Ore 3,38′. Pressione = 178 mm. Vomita ripetutamente.

Ore 3,42′. Dopo essere rimasta 4 minuti a questa forte depressione, vedendo che l'animale si trova in uno stato di profondo sopore, interrotto solo dal vomito, si fa aumentare la pressione, e la scimmia subito si rialza e sta meglio.

Ritornata alla pressione normale e levata dalla campana, cammina bene, e salta spontaneamente sulla tavola dove io la prendo in braccio per l'esame dei polmoni. All'ascotazione si trova in entrambi i polmoni il soffio bronchiale con mancanza del murmure vescicolare. L'iperemia sembra più intensa che non fosse nell'esame precedente un'ora prima.

Esaminato questo Papio il giorno dopo, troviamo che migliorarono molto le condizioni dei polmoni: il soffio bronchiale era limitato ad alcuni punti ed era ricomparso il murmure vescicolare dove non si era più riscontrato appena tolta la scimmia dalla campana.

Risulta evidente da questa esperienza che nelle tre successive depressioni barometriche la scimmia mostrò una resistenza sempre maggiore all'azione dell'aria rarefatta. Questo fenomeno si connette con quanto osservammo nella prima esperienza, che le scimmie come i cani si abituano rapidamente alla rarefazione dell'aria: ma è difficile comprendere per quale meccanismo succeda questo rapido adattamento. La prima volta il vomito è comparso a 6643 metri; la seconda a 8600; la terza volta per produrre il vomito si dovette fare una rarefazione corrispondente a 10,000 metri.

I fenomeni che studiammo in questa scimmia sono essenzialmente i sintomi dell'anemia cerebrale. Lo spegnersi dell'intelligenza, la grande debolezza muscolare, il vomito ed il sonno, sono i segni caratteristici dell'anemia cerebrale in qualunque modo si produca. La comparsa del sonno e del vomito possono considerarsi come i due segni che attestano il momento nel quale il cervello ha subìto un certo grado di denutrizione.

La seconda volta, quando la depressione barometrica corrispondeva all'altitudine di 8300 metri, la scimmia era meno abbattuta e meno sonnolenta della prima volta: e la terza volta che si produsse la decompressione a 9000 metri si trova in condizioni migliori che non fosse prima. A quest'altitudine si guarda nello specchio e si riconosce.

Tanto in queste quanto nelle precedenti esperienze, questo *Papio* non fece alcun movimento che possa farci credere che abbia avuto un principio di vertigine. Non mosse mai le mani rapidamente per tenersi alle pareti come ho veduto alcune volte in altre scimmie. I suoi movimenti furono sempre coordinati e mai convulsivi. L'intelligenza si offuscava poco per volta, come se un velo sempre più fitto oscurasse la sua coscienza.

Ripetendo molte volte queste esperienze, non solo mi convinsi che queste rapidissime depressioni sono innocue, come lo provai sopra di me; ma che non producono alcun dolore, neppure il mal di capo. Anche quando la scimmia restava senza coscienza per lungo tempo, appena tornava alla pressione normale, riprendeva il suo buon umore e la sua vivacità. E che non serbasse memoria, mi pare dimostrato dal fatto che essa non reagiva quando cercavamo di metterla sotto la campana pneumatica.

Quanto al rapido adattamento alle forti depressioni, è una cosa complessa. In un mio precedente scritto ho trovato (1) che quando si fa respirare ad un cane una miscela di aria e di idrogeno, anche se la diminuzione della razione fu poco notevole e tale da non causare un mutamento grave della profondità e frequenza del respiro, ciò nulla meno si osserva un effetto, perchè quando l'animale torna a respirare ossigeno od aria, per un tempo ab-

(1) A. Mosso, *L'apnea prodotta dall'ossigeno*. Accademia R. delle scienze di Torino, 6 dicembre 1903.

bastanza lungo, rimane depressa la funzione respiratoria come se i centri nervosi potessero dopo funzionare con maggior economia di ossigeno.

Quanto alle modificazioni osservate nello stato dei polmoni, esse devono riferirsi ad una semplice iperemia: ora due sono le cause le quali possono aver dilatato i vasi sanguigni: o vi fu una diminuzione nella forza delle sistoli cardiache e questa produsse un accumulo di sangue nei polmoni, oppure vi fu una diminuzione della tonicità dei vasi sanguigni per una paralisi della loro innervazione. È probabile che tutte due queste cause abbiano agito.

Che i polmoni abbiano un apparato speciale di innervazione vasomotoria più nessuno ne dubita. Tra le ricerche decisive che dimostrano l'esistenza di questa innervazione, ricorderò le esperienze di E. Cavazzani fatte per mezzo della circolazione artificiale (1). Praticando la circolazione artificiale in un lobo dei polmoni nell'animale vivo, trovò che eccitando il simpatico si produce una contrazione vascolare tale, che la velocità del deflusso si riduce di quasi la metà. Non meno dimostrative sono le esperienze che Plumier (2) fece nel Laboratorio di L. Fredericq, per mezzo delle quali fu dimostrato che le oscillazioni di Traube ed Hering esistono anche nella pressione dell'arteria polmonare. Le esperienze successive di François Franck hanno confermato l'azione vasoconstrittiva del simpatico toracico (3).

La prova che in questa scimmia fosse meno attiva la circolazione del sangue si ebbe nella cianosi del pene; e possiamo essere certi che un effetto eguale si è prodotto nella circolazione sanguigna dei polmoni.

Un altro fatto importante risultò da queste esperienze fatte colle depressioni fortissime e rapide, ed è che manca per l'azione dell'aria rarefatta un effetto meccanico sulla circolazione polmonare e sui movimenti del respiro. Già sapevasi come la resistenza che incontra il sangue a circolare nei polmoni sia minima, cosicchè il lavoro del cuore destro nelle condizioni normali è pochissima cosa, e dimostrai per mezzo di un'apposita esperienza, che l'aria penetra e distende i polmoni fino al massimo grado, senza incontrare alcuna resistenza nei minimi bronchi e negli alveoli durante la dilatazione fatta per mezzo dei muscoli della cavità toracica e dal diaframma (4).

La struttura delle vie aeree e dei vasi sanguigni nei polmoni sono degne di meraviglia per il modo col quale fu raggiunto lo scopo di facilitare l'introduzione dell'aria nei polmoni e di evitare che nasca un disturbo

(1) A. Cavazzani, *L'innervation vasomotrice des poumons.* Archives ital. de Biologie, Tome 16, pagg. 32, 49.

(2) Léon Fredericq, *Travaux du Laboratoire de l'Université de Liège,* Tome VI, 1901, pag. 273.

(3) François Franck, *L'action vaso-constrictive pulmonaire du grand sympatique.* Archives de Physiologie, Tome VII, 1895, pag. 816.

(4) A. Mosso, Archives ital. de Biologie, tome XXXV, pag. 99.

nella circolazione generale, quando sorge un ostacolo in una parte della piccola circolazione.

La grande resistenza alle depressioni barometriche e l'incolumità che presentano gli animali e l'uomo per il passaggio rapidissimo ad un'altitudine di 10,000 metri si deve essenzialmente alla struttura dei polmoni ed ai gas del sangue che non si mettono in libertà per queste rapidissime e forti depressioni. Infatti in 55 secondi vedemmo superare impunemente i 55 centimetri di mercurio in meno della pressione ordinaria, senza alcun sintomo di un ostacolo alla respirazione ed alla circolazione polmonare.

Nelle esperienze che feci sul Monte Rosa misurando la capacità vitale, dimostrai che anche le persone più robuste arrivate alla Capanna Regina Margherita introducevano una quantità di aria notevolmente minore; che nelle varie persone da me studiate era in media di circa mezzo litro (1). Questa diminuzione dello spazio occupato prima dall'aria rappresenta la quantità di sangue che trovasi accumulata nei polmoni per la dilatazione dei vasi.

Nel soldato Ramella le alterazioni dei polmoni furono più gravi, e dimostrai come vi sia una malattia speciale dei polmoni che si osserva solamente sulle Alpi (2).

Esporrò più minutamente in altra Nota quali siano le alterazioni dei polmoni che si osservano nell'aria rarefatta, svolgendo più ampiamente questo soggetto che già trattai in uno studio che feci per mezzo dell'ossido di carbonio (3). Gli anatomi patologi ammettono come Birch Hirschfeld (4), che talvolta in seguito agli sforzi muscolari, e ad una attività grande dei polmoni, succeda un'iperemia tale di questi organi, da produrre la morte, il così detto « Lungenschlag ».

(1) A. Mosso, *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, pag. 203.

(2) A. Mosso, op. cit., pag. 427. Appendice.

(3) A. Mosso, *Comment agissent sur les poumons l'oxyde de carbone et l'air raréfié*. Archives ital. de Biologie, XXXV, pag. 91.

(4) Birch Hirschfeld, *Lehrbuch der pathologischen Anatomie*, 1877, pag. 705.

Fisiologia. — *Esperienze fatte sulle scimmie a Torino e sulla vetta del Monte Rosa.* Nota del Socio A. Mosso (1).

Ho portato due scimmie sulla vetta del Monte Rosa, nella speranza che in questi animali si potesse studiare meglio il male di montagna che non nei cani e sull'uomo. Siccome le scimmie che trovansi nel commercio sono spesso affette da tubercolosi, per averle sane le ordinai ad un commerciante in modo che mi furono spedite direttamente dal luogo di origine. Erano due macachi (*Macacus sinicus*) maschio e femmina che venivano da Giava e stettero una quarantina di giorni in viaggio. Arrivarono nello scorso giugno a Genova e vennero subito spedite a Torino.

La scimmia maschio pesava 1640 grammi, la femmina 1500 grammi. Erano entrambe molto vivaci e intelligenti. Esaminati i polmoni si trovarono normali. Sapendo quanto questi animali siano sensibili al freddo, per trasportarli, feci costruire una cassa nella quale anche sui ghiacciai e nella capanna Regina Margherita potessi mantenere a circa 20° la temperatura dell'ambiente in cui stavano le scimmie.

Questa cassa di legno era alta 55 cm. ed aveva 34 cm. per lato. Si chiudeva per mezzo di un coperchio a cerniera alto 8 cm., che portava nel bordo quattro finestrini con sportelli mobili scorrevoli internamente e permettevano di regolare la ventilazione nella cassa. Il fondo era doppio ed aprivasi con uno sportello nel quale passava un recipiente di zinco alto 10 cm. e un poco più stretto del fondo della cassa il quale conteneva circa otto litri di acqua. Questo recipiente era chiuso come gli ordinarî scaldapiedi ad acqua calda.

Al di sopra vi era un piatto di zinco fisso sopra un piano di legno con un bordo di 2 cm. che serviva per raccogliere l'orina e le feci, e poteva levarsi dal medesimo sportello pel quale passava il recipiente dell'acqua calda. La parte soprastante era formata da un'altra cassetta di legno con dei fori larghi: questa, per levarla, si sollevava dalla parte del coperchio e così potevasi lavare facilmente la cassa e tenerla pulita. Per attraversare i ghiacciai e mantenere alta la temperatura della cassa, ci servivamo di una lampada ad alcool colla quale si scaldava il serbatoio dell'acqua dopo averlo levato dal fondo della cassa. Questo serbatoio di acqua calda manteneva una temperatura sufficientemente elevata per circa cinque ore.

Arrivati ad Alagna facemmo fare un abito di lana alle due scimmie in modo che le braccia, il torace e l'addome fossero meglio protette. Le nutrimmo con carote, frutta, pane e biscotti. Quando c'era il sole le mettavamo

(1) Presentata nella seduta del 21 febbraio 1904.

in libertà: nelle capanne stavano vicino al fuoco della stufa, e di notte dormivano nella loro cassa alla quale si erano affezionate e vi stavano con preferenza anche quando si staccavano dalla catena. La salute delle scimmie fu sempre buona e non ebbero mai tosse. Al col d'Olen nell'altitudine di circa 3000 metri il maschio mostrava ancora delle velleità amorose.

Giunte alla capanna Regina Margherita ebbero subito nei primi giorni la tosse. Esaminati i polmoni trovammo in tutte due che era meno chiaro il

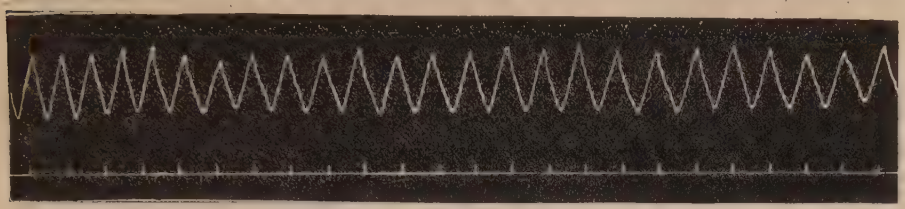


Fig. 1. — Respirazione toracica della scimmia maschio scritto a Torino nel principio di luglio. La linea sottostante segna il tempo in secondi.

murmure vescicolare e sentivansi dei soffi bronchiali. Del resto nulla di anormale: le labbra e la lingua erano un poco più pallide, ma non vi era traccia di cianosi.

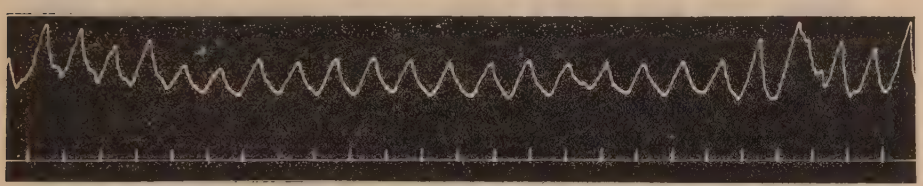


Fig. 2. — Respirazione toracica della medesima scimmia scritta sulla vetta del Monte Rosa il 20 agosto 1903.

Nel principio di luglio avevo scritto a Torino il respiro del torace applicando un pneumografo per mezzo di una fascia all'altezza delle mammelle e ottenni nel maschio il tracciato della fig. 1. Il respiro, come si vede nella linea del tempo scritta sotto in secondi, è circa 68 al minuto.

Il giorno 20 agosto, dopo otto giorni che le scimmie si trovavano nella Capanna Regina Margherita torno a scrivere il respiro toracico col medesimo timpano a leva e collo stesso pneumografo.

Anche in questa scimmia, come già osservammo nell'uomo e nei cani, è diminuita la frequenza del respiro da 64 a 68 che era in media a Torino, è scesa a 54 e 56 al minuto. La profondità dei moti respiratori è meno grande.

Paragonando il tracciato 2 al 1, apparisce evidente che le respirazioni sono più superficiali ed irregolari che non a Torino.

L'esame dei polmoni diede un risultato identico a quello dei giorni precedenti: vi era una leggera congestione con catarro e tosse.

Contando il respiro nella femmina, notammo una differenz amaggiore di quella che osservasi dal paragone dei tracciati. L'applicazione del pneumografo produceva una eccitazione dell'animale che accelerava il ritmo respiratorio. Lasciando l'animale tranquillo senza toccarlo e guardando solo i movimenti del respiro, contandoli a Torino la frequenza media in questa scimmia era di 70 al minuto: nella Capanna Regina Margherita, la media era solo di 62.

Si verifica dunque anche per le scimmie quanto abbiamo osservato nell'uomo e nei cani, che la frequenza del respiro, sebbene la pressione barometrica sia tanto diminuita, non presenta un aumento nella frequenza ma piuttosto una diminuzione.

Analisi dei gas del sangue.

L'analisi dei gas del sangue di queste due scimmie venne fatta dal dott. G. Marro.

Capanna Regina Margherita 22 agosto 1903.

Scimmia femmina ore 14; pressione barometrica 438 mm. T = 14°
Sangue preso dalla carotide destra.

$O_2 = 18\ \%$ $\qquad$ $CO_2 = 30{,}14\ \%$
ore 17, $\quad t = 12°$.

Scimmia maschio, peso gr. 1640.

Già operata alla femorale sei giorni fa; tentiamo di prendere il campione dalla femorale sinistra ma non ci riesce, causa la poca pressione del sangue; lo prendiamo dalla carotide destra; il sangue è di color oscuro:

$$O_2 = 17{,}64\ \%.$$

La determinazione dell'anidride carbonica va perduta come tutte in due le analisi precedenti del sangue preso dalla femorale sinistra, in causa ad una burrasca che imperversò nei primi giorni del nostro soggiorno nella Capanna Regina Margherita, la quale non lasciava funzionare bene la stufa invertendone spesso il tiraggio.

La tosse che era stata forte nei primi giorni che arrivammo alla Capanna Regina Margherita era già diminuita quando partimmo, e giunte ad Alagna queste scimmie avevano il loro aspetto normale. Giunte a Torino il

31 agosto non stavano più così bene, mangiavano con minor appetitto ed erano diventate intrattabili e molto eccittabili.

Torino 2 settembre, ore 17 t = 23°.

Pressione barometrica 735 mm.

Scimmia femmina; carotide sinistra, sangue un po' scuro; l'animale è agitatissimo.

$O_2 = 18{,}82\ \%$ $CO_2 = 35{,}9\ \%$

ore 18,30 t = 23°.

Scimmia maschio; si agita molto; carotide sinistra, sangue scuro.

$O_2 = 14{,}74\ \%$ $CO_2 = 37{,}92\ \%$

Il dott. Carlo Foà osservando il sangue della scimmia maschio una prima volta appena arrivati alla Capanna Regina Margherita, ed un'altra volta dopo otto giorni di permanenza alla capanna, trovò nel sangue arterioso un aumento di globuli rossi e di emoglobina non riferibile a disturbi vasomotori, ma ad aumentata ematopoesi (1).

Il prof. Galeotti (2) che determinava l'alcalinità del sangue, trovò una diminuzione nell'alcalinità del sangue nella scimmia femmina di 43,49 %. L'analisi dell'alcalinità del sangue fu fatta per la scimmia maschio nella Capanna Regina Margherita, ma non potè ripetersi a Torino perchè dopo quindici giorni la scimmia moriva.

La diminuzione tanto notevole di ossigeno osservata nell'analisi del sangue a Torino, dimostra per sè stessa che la scimmia era malata.

Le osservazioni fatte su queste scimmie non differiscono per le alterazioni chimiche e morfologiche del sangue da quelle che vennero fatte contemporaneamente sul cane, sul coniglio e sull'uomo. Si notò pure che sulla vetta del Monte Rosa, malgrado tutte le precauzioni prese perchè queste scimmie non soffrissero il freddo, esse ebbero un'alterazione dei polmoni la quale dopo rapidamente migliorava. Non ci è stato possibile studiare la temperatura rettale di queste scimmie, perchè reagivano con grande energia all'introduzione del termometro. Gli esami ripetuti che si dovettero fare del sangue arterioso furono probabilmente la causa che ne affrettarono la fine.

Se si dovranno ripetere simili esperienze, bisognerà portare un numero maggiore di scimmie per modo che non vengano salassati gli animali che sono destinati alle osservazioni fatte sugli organi respiratorî.

(1) C. Foà, *I mutamenti del sangue sull'alta montagna.* Rendiconti Accad. dei Lincei, fasc. 9°, 2° sem. 1903.

(2) G. Galeotti, *Le variazioni dell'alcalinità del sangue sulla vetta del Monte Rosa* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, fasc. 12°, 2° sem. 1903.

Geologia. — *Gli strati marini della Cava Mazzanti al Ponte Molle.* Nota I del Socio C. De Stefani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Nuova teoria intrinseca degli spazi curvi.* Memoria del Corrispondente E. Cesàro.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Astronomia. — *I pianeti NA ed NB 1904.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

I pianeti NA ed NB 1904 furono trovati fotograficamente da Dugan a Königstuhl al 10 gennaio.

L'identità di NA con (505), = 1902 LL, fu presto segnalata.

L'orbita di (505), con osservazioni di prima opposizione, era stata calcolata dal ben conosciuto calcolatore Osten di Bremen.

I pianeti NA e NB, all'epoca della scoperta, si trovavano in posizioni geocentriche vicine, ed ambedue in prossimità dell'effemeride dedotta dagli elementi del (505), NA ben più prossimo; ma l'uno o l'altro dei pianeti, per isplendore e per le grandezze $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ e $\frac{\Delta\delta}{\Delta t}$, poteva essere identico con (505). Per oltre un mese una correzione all'effemeride di Osten, a differenze seconde circa costanti, bastava per rappresentare NB, che più discostava da essa. Osten e Kreutz, di questi dì, provarono l'identità di NA con (505); e l'orbita ellittica di NB, che è nuovo, calcolata in base alle osservazioni di Königsthul e di Roma (C. R.) da Ebell, mostrò, come si prevedeva, la straordinaria somiglianza negli elementi, non solo del piano ma dell'orbita, di (505) con NB 1904.

Elementi di NB 1904		Elementi di (505) = NA 1904	
T	1904 febbraio 16 12^h B	T	1904 febbraio 16 12^h B
M	35°,2	M	31°,9
ω	312, 6	ω	318, 8
Ω	90, 4	Ω	90, 0
i	10, 5	i	9, 6
φ	16, 2	φ	17, 6
μ	781″	μ	697″
π	43°,0	π	48°,8

Sono due orbite circa in un piano disposte simmetricamente, NA esterna rapporto ad NB.

Aggiungo la serie di osservazioni fatte al Collegio Romano coll'equatoriale Steinheil-Cavignato col micrometro filare e amplificazione 240, la più gran parte delle quali si deve all'attivissimo astronomo dott. Emilio Bianchi.

Epoca					Ascensione retta app.:	Declinazione app.:	Osservatore
1904.	I.	17	$6^h53^m48^s$	R.C.R.	$4^h58^m24^s.04$ ($9^n.441$)	$+23°32'14''.2$ (0.508)	M.
»	I.	17	8 55 55	»	4 58 23.02 ($8^n.601$)	+23 32 42.2 (0.439)	B.
»	I.	18	6 43 11	»	4 58 14.37 ($9^n.459$)	+23 37 42.8 (0,513)	M.
»	I.	18	6 52 45	»	4 58 14.36 ($9^n.433$)	+23 37 46.8 (0.504)	B.
»	I.	19	6 3 10	»	4 58 6.76 ($9^n.537$)	+23 43 5.6 (0.547)	B.
»	I.	22	8 57 20	»	4 57 56.75 (7.700)	+24 0 3.2 (0.427)	B.
»	I.	22	9 6 40	»	4 57 56.75 (8.389)	+24 0 5.8 (0.427)	M.
»	I.	23	10 27 26	»	4 57 58.00 (9.292)	+24 5 42.7 (0.461)	B.
»	I.	25	9 22 6	»	4 58 7.59 (8.908)	+24 16 3.5 (0.427)	B.
»	I.	27	11 39 15	»	4 58 26.39 (9.538)	+24 26 56.3 (0.536)	B.
»	I.	28	9 33 39	»	4 58 38.05 (9.107)	+24 31 37.2 (0.430)	B.
»	II.	12	7 34 36	»	5 5 37.68 ($8^n.064$)	+25 43 4.9 (0.384)	B.
»	II.	16	6 50 53	»	5 8 38.03 ($8^n.888$)	+26 0 23.1 (0.383)	B.

Chimica. — *Ricerche sulla radioattività in relazione colla presenza dell'elio.* Nota preliminare del Corrispondente R. Nasini.

Sino dall'anno 1894 insieme coi professori Anderlini e Salvadori intrapresi una serie di lavori per la ricerca dell'argo e dell'elio, e eventualmente, di nuovi gas nelle emanazioni terrestri italiane. Parte dei resultati sono già pubblicati, altri sono in corso di pubblicazione: prestissimo spero di potermi nuovamente dedicare a quelli studî. Trovammo l'elio in varie emanazioni: in quantità notevole lo riscontrammo nei gas dei soffioni di Larderello, e, in quantità minore, in alcuni prodotti vesuviani, nei gas delle terme di Abano e così via.

Messe in evidenza le relazioni che, per una cagione o per un'altra, indubbiamente esistono fra il radio e l'elio, subito pensai quanto importante sarebbe stato di intraprendere una ricerca sistematica del radio, o di sostanze ad esso analoghe, e della emanazione radioattiva sia nei gas studiati in questo Istituto, sia nei materiali che a questi gas si connettono, così nelle roccie e nelle acque da cui essi escono, nelle incrostazioni e sedimenti delle acque e via dicendo.

Mentre le diverse esperienze erano in corso, comparve la Memoria dei sigg. Elster e Geitel, nella quale veniva annunziata la forte, eccezionale radioattività del fango di Battaglia, radioattività stata confermata dal prof. Vicentini che studiò, insieme con i fanghi di Battaglia anche quelli di Abano.

Il dott. Pellini ha intrapreso nel mio Istituto delle estese ricerche di indole chimica sopra i fanghi e le acque di Abano ricercando l'uranio e il radio. Egli ha potuto constatare la forte attività del precipitato baritico che si ottiene quando alla soluzione cloridrica del fango si aggiunge del cloruro di bario: si ha invece una sostanza molto meno radioattiva precipitando con acido solforico la soluzione cloridrica stessa. Elettrolizzando questa soluzione non si sono avuti pel catodo metallico resultati molto decisivi; ma altre esperienze sono in corso. Secondo le ricerche del Pellini, si mostrerebbero più attivi i fanghi di Abano che quelli di Battaglia, come ha trovato il prof. Vicentini. Le esperienze sulla radioattività sono state eseguite sia col metodo fotografico, che con quello elettroscopico.

Il dott. Anderlini ha cominciato a studiare i materiali dei soffioni di Larderello. Ha intanto esaminato i detriti della trivellazione che si pratica nella roccia per ottenere artificialmente i soffioni, ed il fango dei lagoni. Ha ottenuto col metodo elettroscopico resultati che mostrano essere l'uno e l'altro prodotto assai radioattivo. Inoltre ha esaminato il solfato baritico proveniente da una roccia del Vesuvio, in cui era stato trovato elio e bario. Questo solfato si mostra notevolmente radioattivo, resultato questo che mi sembra di un certo interesse. Le esperienze del dott. Anderlini sul residuo delle acque delle Fonti del Clitunno mostrerebbero in esso un'attività, ma assai leggera.

Spero presto di poter comunicare altre notizie sulle esperienze che si stanno facendo nel mio Istituto, specialmente su quelle che riguardano l'emanazione radioattiva.

Matematica. — *Sulle coppie di superficie applicabili nello spazio ellittico.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio U. DINI [1].

In una mia Memoria [2] ho dimostrato che le immagini di Clifford di una superficie, ottenute tirando da un punto P le parallele destrorse e sinistrorse alle sue normali e segando col piano polare si corrispondono in modo equivalente e che viceversa ogni tale corrispondenza equivalente di un piano ellittico in sè determina una congruenza normale. Di più ho dimostrato che superficie applicabili determinano sulle loro immagini di Clifford una corrispondenza equivalente. Scopo di questa nota è il cercare un'applicazione di questi fatti al problema [3] dell'applicabilità nello spazio ellittico.

Siano $Edu^2 + Gdv^2$, $Ddu^2 + D''dv^2$ le due forme fondamentali di una superficie S riferita alle sue linee di curvatura, e siano X_i, Y_i, Z_i i para-

[1] Presentata nella seduta del 7 febbraio 1904.

[2] *Il parallelismo di Clifford*; Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa 1900. Il prof. Bianchi mi comunica essere stato il seguente teorema già osservato da Study.

[3] Cfr. Bianchi, *Sopra le rappresentazioni equivalenti* ecc. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, fasc. 1°, 1° sem. 1904.

metri di scorrimento destrorsi del triedro principale, $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$ i sinistrorsi. Avremo (cfr. pag. 42 della mia Mem. cit.)

$$(1)\quad \begin{cases} dX_i = \sum_k (p_{ik} X_k du + q_{ik} X_k dv) \qquad (i, k = 1, 2, 3) \\ \text{dove:} \\ p_{ik} + p_{ki} = p_{ii} = 0 \; ; \; p_{12} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \; ; \; p_{13} = +\frac{D}{\sqrt{E}} \; ; \; p_{23} = \\ = \pm \sqrt{E} \; ; \; q_{12} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \; ; \; q_{13} = \mp \sqrt{G} \; ; \; q_{23} = \frac{D''}{\sqrt{G}} \end{cases}$$

e le analoghe per Y_i, Z_i; in queste valgano i segni superiori; gli inferiori valgano per le $\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i$. Costruiamo le equazioni seguenti:

$$(A)\quad \begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial u} = -(\lambda X_1 + \mu X_2) z_2 - (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_3 - (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_4 \\ \frac{\partial z_2}{\partial u} = (\lambda X_1 + \mu X_2) z_1 + (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_4 - (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_3 \\ \frac{\partial z_3}{\partial u} = -(\lambda X_1 + \mu X_2) z_4 + (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_1 + (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_2 \\ \frac{\partial z_4}{\partial u} = (\lambda X_1 + \mu X_2) z_3 - (\lambda Y_1 + \mu Y_2) z_2 + (\lambda Z_1 + \mu Z_2) z_1 \end{cases}$$

e la equazioni (A′) che se ne deducono mutando $\frac{\partial}{\partial u}, \lambda, \mu$ in $\frac{\partial}{\partial v}, \lambda_1, \mu_1$, essendo $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ quattro funzioni da determinarsi. Dalle (A), (A′) si ha:

$$\Sigma z_i \frac{\partial z_i}{\partial u} = \Sigma z_i \frac{\partial z_i}{\partial v} = 0 \quad \text{ossia} \quad \Sigma z_i^2 = \text{cost.}$$

Dividendo le z_i per uno stesso fattore, esse saranno le coordinate di un punto mobile descrivente una certa superficie Σ_A. Scriviamo le condizioni per la completa integrabilità delle (A), (A′) [1]. Uguagliando nei due valori che se ne deducono per $\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v}$ i coefficienti di z_2 e rotando, troviamo:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\mu_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\mu}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\lambda}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

$$(3_A)\quad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} + \mu_1 \sqrt{E} + \lambda \sqrt{G} + 2(\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1) = 0$$

[1] Le A, A′ se sono integrabili, sono completamente integrabili, poichè con uno scorrimento conveniente a Σ_A si può portarne un punto in una posizione qualunque, pur continuando le (A), (A′) a essere verificate.

Se nelle (A), (A′) alle X_i ecc., sostituiamo le $\overline{X}_i$ ecc., otterremo due nuovi sistemi di equazioni $(\overline{A})$, $(\overline{A}')$ definenti una nuova superficie $\overline{\Sigma}_A$. Le condizioni di integrabilità sono le (2) e la:

$$(3_{\overline{A}}) \qquad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} - \mu_1 \sqrt{E} - \lambda \sqrt{G} + 2(\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1) = 0$$

Se alle (A), (A′) sostituiamo il sistema:

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial u} = -Xz_2 - Yz_3 - Zz_4 \; ; \; \frac{\partial z_2}{\partial u} = Xz_1 - Yz_4 + Zz_3 \\ \frac{\partial z_3}{\partial u} = Yz_1 - Zz_2 + Xz_4 \; ; \; \frac{\partial z_4}{\partial u} = Zz_1 + Yz_2 - Xz_3 \end{cases}$$

(dove per brevità si è posto $X = \lambda X_1 + \mu X_2$ e le analoghe rotando) e il sistema (C′) che se ne deduce ponendo $\frac{\partial z_i}{\partial v}$, λ_1, μ_1 al posto di $\frac{\partial z_i}{\partial u}$, λ, μ troviamo per condizione d'integrabilità le (2) e la

$$(3_C) \qquad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} + \mu_1 \sqrt{E} + \lambda \sqrt{G} - 2(\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1) = 0 .$$

Se queste equazioni sono soddisfatte, le z_i definite dalle (C), (C′) descrivono una superficie, che chiameremo Σ_C. Infine se nelle (C), (C′) alle X_i, Y_i, Z_i sostituiamo le $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$, $\overline{Z}_i$, le condizioni di integrabilità si riducono alle stesse (2) e alla:

$$(3_{\overline{C}}) \qquad \lambda_1 \frac{D}{\sqrt{E}} - \mu \frac{D''}{\sqrt{G}} - \mu_1 \sqrt{E} - \lambda \sqrt{G} - 2(\lambda_1 \mu - \lambda \mu_1) = 0$$

Se queste equazioni sono soddisfatte, il punto z_i descrive una nuova superficie $\overline{\Sigma}_C$. Esaminiamo ora le equazioni (A), (A′) ecc. definenti una qualsiasi delle superficie Σ; o direttamente, oppure ricordando le equazioni a pag. 8 della mia Memoria citata, si trova che i parametri di scorrimento della normale a Σ_A ($\overline{\Sigma}_A$) nel verso destrorso sono X_3, Y_3, Z_3 ($\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$), quelli della normale a Σ_C (a $\overline{\Sigma}_C$) nel verso sinistrorso sono pure X_3, Y_3, Z_3, ($\overline{X}_3$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Z}_3$). Ciascuna delle superficie Σ ha perciò una delle sue due immagini piane di Clifford coincidente con una delle immagini piane della S.

Il quadrato dell'elemento lineare delle quattro superficie Σ è sempre:

$$(4) \qquad (\lambda^2 + \mu^2)\, du^2 + 2(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\, du\, dv + (\lambda_1^2 + \mu_1^2)\, dv^2$$

Ricordiamo però che le λ, μ, λ_1, μ_1 non saranno uguali per le quattro superficie. Esse anzi devono in ciascun caso soddisfare a equazioni distinte,

che possono anzi essere incompatibili: ciò avviene per la (3_A) e la (3_C) (la $(\bar{3}_A)$ e la $(\bar{3}_C)$) che danno $\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu = 0$, cosicchè l'elemento lineare delle superficie corrispondenti sarebbe degenere. Sia ora y_i un punto descrivente una superficie, η_i i coseni di direzione della corrispondente normale [1]. È allora

$$-\Sigma[y, dy]\,d[y, \eta] = -\Sigma[y, dy][dy, \eta] - \Sigma[y, dy][y, d\eta] = -\Sigma\, dy\, d\eta$$

In altre parole $-\Sigma[y, dy]\,d[y, \eta]$ è la seconda forma fondamentale della superficie. Se ora $A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2$ è il quadrato dell'elemento lineare, essa diventa:

$$-\Sigma\left\{\sqrt{A}\left[y, \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial y}{\partial u}\right]du + \sqrt{C}\left[y, \frac{1}{\sqrt{C}}\frac{\partial y}{\partial v}\right]\right\}d[x, \xi]$$

o in altre parole se X_i, Y_i, Z_i sono i parametri, in un verso qualunque, della normale e delle tangenti alle $u = \text{cost}$, $v = \text{cost}$ (anche se $B \neq 0$) la seconda forma fondamentale della superficie è:

$$-\Sigma\left[\sqrt{A}\,dX_1 + \sqrt{C}\,dX_2\right]dX_3$$

Questa semplice formula permette tosto di trovare le seconde forme fondamentali delle nostre superficie. E si trova che esse sono

$$(5)\qquad \left(\lambda\frac{D}{\sqrt{E}} \mp \mu\sqrt{E}\right)du^2 + \left(\mu_1\frac{D''}{\sqrt{G}} \mp \lambda_1\sqrt{G}\right)dv^2 +$$

$$+\left(\mu\frac{D''}{\sqrt{G}} + \lambda_1\frac{D}{\sqrt{E}} \mp \mu_1\sqrt{E} \mp \lambda\sqrt{G}\right)du\,dv$$

dove i segni superiori valgono per Σ_A, Σ_C, gli inferiori per $\bar{\Sigma}_A, \bar{\Sigma}_C$.

Possono ora la $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ soddisfare contemporaneamente oltre che alle (2) anche a due delle (3)? Abbiamo già visto essere inutile combinare le (3_A) con le (3_C), le $(\bar{3}_A$ con le $\bar{3}_C)$. Combinando la (3_A) con la $(\bar{3}_A)$ o o con la $(3\bar{c})$ otteniamo rispettivamente

$$(A\bar{A})\quad \mu_1\sqrt{E} + \lambda\sqrt{G} = 0\ ;\ \lambda_1\frac{D}{\sqrt{E}} - \mu\frac{D''}{\sqrt{G}} \mp 2(\lambda_1\mu - \lambda\mu_1) = 0$$

$$(A\bar{C})\quad \lambda_1\frac{D}{\sqrt{E}} = \mu\frac{D''}{\sqrt{G}}\ ;\ \mu_1\sqrt{E} + \lambda\sqrt{G} \mp 2(\lambda_1\mu - \lambda\mu_1) = 0$$

[1] Cfr. mia Mem. citata pag. 9 e seg. Io indico se y_i, z_i sono due quaterne di variabili ($i = 1, 2, 3, 4$) con $[yz]_1, [yz]_2, [yz]_3$ le $(z_2y_1 - z_1y_2) + (z_4y_3 - z_3y_4)$; $(z_2y_4 - z_4y_2) + (z_3y_1 - z_1y_3)$; $(z_3y_2 - z_2y_3) + (z_4y_1 - z_1y_4)$.

dove valgono i segni superiori; gli inferiori valgono per le $(C\overline{C})$ e $(C\overline{A})$ che si otterrebbero combinando (3_C) con $(\overline{3}_C)$ o con $(\overline{3}_A)$. *Se le* $\lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1$ *oltre che alle* (2) *soddisfanno alle* $(A\overline{A})$, [o alle $(A\overline{C})$] ecc., le *corrispondenti* $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_A, [\Sigma_A, \overline{\Sigma}_C]$ ecc. *sono applicabili. E perciò integrando i precedenti sistemi di equazioni, si deducono da ogni superficie* S *infinite coppie di superficie* Σ *applicabili, aventi le normali parallele in un certo verso alle normali di* S. L'ipotesi qui fatta che due tangenti corrispondenti sulle Σ siano parallele a una stessa tangente di S non è restrittiva e sarà giustificata più sotto.

Perverremo a una notevole applicazione delle precedenti formule, chiedendoci: È possibile che sulle $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_A$ le tangenti alle $u = \text{cost.}$ e alle $v = \text{cost.}$ abbiano gli stessi parametri destrorsi e sinistrorsi che le corrispondenti tangenti di S, ossia che $\mu = \lambda_1 = 0$? In tal caso le $(A\overline{A})$ darebbero $\lambda\mu_1 = \mu\lambda_1$ caso che sappiamo da escludersi. Nel secondo dalle (2) e dalle $(A\overline{C})$ si ha:

$$\mu_1\sqrt{E} + \lambda\sqrt{G} - 2\lambda\mu_1 = 0\ ;\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{\mu_1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\ ;\ \frac{\partial\mu_1}{\partial u} = \frac{\lambda}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Si può porre perciò $\lambda = \frac{\sqrt{E}}{\xi}, \mu_1 = \frac{\sqrt{G}}{2-\xi}$ dove ξ è una nuova incognita $(\xi \neq 0, \xi \neq 2)$. È poi $\xi \neq 1$ perchè altrimenti le (5) dimostrerebbero identiche le $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_C$; e noi chiaramente trascuriamo questo caso ovvio banale. Le equazioni precedenti divengono così:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\log\sqrt{E} - \frac{1}{2}\log\frac{\xi^2}{\xi-1}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\log\sqrt{G} - \frac{1}{2}\log\frac{(\xi-2)^2}{\xi-1}\right] = 0\ .$$

È mutando i parametri dalle u, v si trova potersi porre:

$$(6) \qquad E = \frac{\xi^2}{\xi-1} \qquad G = \frac{\xi^2}{\xi-1} - 4$$

Perciò è

$$(I) \qquad E - G = 4\ .$$

Notiamo che il nostro calcolo è lecito perchè il mutare p. es. il parametro delle u moltiplica per uno stesso fattore $\lambda, \mu_1, \sqrt{E}$; quindi ξ non muta. Per le (6) le forme fondamentali delle $\Sigma_A, \overline{\Sigma}_C$ diventano così:

$$(7) \qquad ds^2 = \frac{1}{\xi-1}(du^2 + dv^2)$$

$$(8) \qquad \frac{D}{\xi}du^2 + \frac{D''}{2-\xi}dv^2 = 2\,du\,dv\ .$$

Le due superficie in discorso hanno perciò uguale in punti corrispondenti la curvatura media e perciò anche (*essendo applicabili*), *i raggi di curvatura. Esse sono una coppia di superficie di Bonnet nello spazio ellittico* (1).

Viceversa, prese due superficie Σ_A, $\bar{\Sigma}_C$ applicabili con conservazione dei raggi di curvatura, si prendano a linee coordinate u, v quelle tali che le loro seconde forme fondamentali non differiscano che per il segno del coefficiente di $du\,dv$; l'ipotesi fatta dimostra tosto che le linee in discorso sono ortogonali; le equazioni di Codazzi dicono subito che il coefficiente di $du\,dv$ è costante, p. es. uguale a ± 1 e che le linee in discorso formano un sistema isotermo. Scritte le forme fondamentali sotto la forma (6), (7) si ricavano tosto i valori di ξ, D, D'' e per le (6) anche di E, G; si trova così una superficie S riferita alle linee di curvatura per cui è soddisfatta la (I) (perchè le equazioni di Codazzi e di Gauss relative si trovano tosto soddisfatte). E questa superficie si può costruire per quadrature, essendone note le immagini piane di Clifford (loc. cit. § 20) che coincidono con immagini delle superficie date.

Noi potremo chiamare queste superficie per cui è soddisfatta (I) (quando ci si riferisce alle linee di curvatura) superficie pseudoisoterme. E diremo allora:

Il problema di costruire le superficie pseudoisoterme dello spazio ellittico e quello di costruire le coppie di Bonnet (*coppie di superficie applicabili con conservazione dei raggi di curvatura*) *nello stesso spazio, sono problemi equivalenti.*

Alle superficie pseudoisoterme appartiene una classe notevole di superficie, quelle cioè per cui la somma dei raggi ridotti ϱ_1, ϱ_2 *di curvatura è uguale a 2 e a ognuna di esse corrisponde quindi una coppia di superficie di Bonnet.* Infatti ponendo, in tal caso, $\lambda = \frac{\sqrt{E}}{\varrho_2}$, $\mu_1 = \frac{\sqrt{G}}{\varrho_1}$ le (2), (3) risultano soddisfatte in causa dall'ipotesi fatta e delle equazioni di Codazzi.

A due superficie applicabili $\bar{\Sigma}_A$, Σ_A tali che l'angolo destrorso delle loro normali è costante, corrisponde evidentemente una superficie S tale che le parallele alle sue normali tirate da un punto fisso P formano un angolo costante e viceversa. La superficie S non sarebbe che un'evolvente di una sfera col centro P.

In generale si può dire che la ricerca delle *coppie di superficie applicabili con una proprietà prefissa qualsiasi è ricondotta alla ricerca di una superficie dotata di una qualche speciale proprietà.*

(1) Cfr. Bianchi, *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, fasc. 11°, 2° sem. 1903.

Studiamo ora il problema inverso e siano T, U due superficie applicabili qualunque: in qual modo si potrebbero esse dedurre nel modo testè studiato da una superficie S dello spazio stesso? Distinguiamo varii casi: Nel caso α (δ) le immagini di S coincidano con le destrorse (sinistrorse) di T, U. Nel caso β (γ) lè normali a S siano parallele rispettivamente nel verso destrorso e sinistrorso (sinistrorso e destrorso) alle corrispondenti di T, U.

Siano X_i, Y_i, Z_i i parametri della tangente alla $v = \text{cost.}$, $(i = 1)$, della normale $(i = 3)$ e della tangente perpendicolare a queste due rette $(i = 2)$ di T; e siano $\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i$ le quantità analoghe per U. Nel caso (α) (δ) siano questi parametri destrorsi (sinistrorsi); nel caso β (γ) siano destrorsi (sinistrorsi) quelli calcolati per T e siano sinistrorsi (destrorsi) quelli di U. Siano $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ l'elemento lineare, $D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2$, $\overline{D}\,du^2 + 2\overline{D}'\,du\,dv + \overline{D}''dv^2$ le seconde forme fondamentali delle due superficie T, U; supponiamo che le $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, siano assintotiche sulla superficie S da determinarsi. I parametri di una normale a S sono $X_3, Y_3, Z_3, \overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3$. Per distinguere la superficie S dalle superficie parallele, che hanno le stesse normali, osserviamo che l'angolo delle due parallele a una retta r tirate da un punto P non dipende che dalla distanza da P a r. Cosicchè se S, S′ sono due superficie parallele e da un punto di S′ tiro le due parallele a una tangente di S nel punto corrispondente, l'angolo di queste due rette non varia, mutando il punto e la tangente considerata. Osserviamo ora le tangenti di S, che hanno per parametri destrorsi X_1, Y_1, Z_1 e X_2, Y_2, Z_2. I parametri sinistrorsi saranno $\overline{X}_1 = \cos\varphi\,\overline{X}_1 + \operatorname{sen}\varphi\,\overline{X}_2$ ecc. e $\overline{\overline{X}}_2 = -\operatorname{sen}\varphi\,\overline{X}_1 + \cos\varphi\,\overline{X}_2$ ecc., dove φ è un angolo qualunque, che io dico costante. Infatti il vertice del triedro, i parametri dei cui spigoli sono $(X_i, Y_i, Z_i, \overline{\overline{X}}_i, \overline{\overline{Y}}_i, \overline{\overline{Z}}_i)$ (si è posto $\overline{\overline{X}}_3 = \overline{X}_3$ ecc.) genera una superficie S di cui $(X_3, Y_3, Z_3, \overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3)$ è la normale soltanto se:

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \Sigma \overline{\overline{X}}_2 \frac{\partial \overline{\overline{X}}_1}{\partial u}\ ;\ \Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \Sigma \overline{\overline{X}}_2 \frac{\partial \overline{\overline{X}}_1}{\partial v}\ .$$

Ma essendo T, U applicabili è

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \Sigma \overline{X}_2 \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial u}\ ;\ \Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \Sigma \overline{X} \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial v}\ .$$

Le precedenti equazioni divengono perciò $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0, \varphi = \text{cost.}$ Questo angolo varia perciò soltanto di una costante additiva, passando dalla superficie S a una delle parallele; e quindi, per l'osservazione precedente, noi potremo scegliere tra queste superficie la S proprio in modo che $\varphi = 0$. Quale è ora la condizione, affinchè le linee coordinate siano proprio le assintotiche di S? Si verifica tosto che ciò avviene soltanto se:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Sigma X_1 \dfrac{\partial X_3}{\partial u} : \Sigma X_2 \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \Sigma \overline{X}_1 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} : \Sigma \overline{X}_2 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} \\ \Sigma X_1 \dfrac{\partial X_3}{\partial v} : \Sigma X_2 \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \Sigma \overline{X}_1 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} : \Sigma \overline{X}_2 \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} \end{cases}$$

Sia ora una superficie qualunque, riferita a un arbitrario sistema di linee coordinate; siano $E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$, $D\,du^2 + 2\,D'du\,dv + D''dv^2$ le sue forme fondamentali; siano $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i$ i parametri di scorrimento del solito triedro formato dalla tangente alla $v = \text{cost.}$, dalla normale e dalla tangente perpendicolare a queste due rette. Avremo (cfr. la mia Mem. cit. pag. 42 dove le seguenti formole sono date nel caso di $F = 0$):

$$(10)\qquad \begin{cases} d\xi_3 = -\left\{ \dfrac{D}{\sqrt{E}}\xi_1 + \left(\dfrac{FD - ED'}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \sqrt{E} \right) \xi_2 \right\} du + \\ + \left\{ \pm \left(\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} - \dfrac{D'}{\sqrt{E}} \right) \xi_1 + \left(\dfrac{FD' - ED''}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \dfrac{F}{\sqrt{E}} \right) \xi_2 \right\} dv \end{cases}$$

dove valgano i segni superiori; gli inferiori valgano per le formule che se ne deducono, mutando le ξ nelle $\overline{\xi}$.

Queste equazioni divengono nel caso (α):

$$(10_\alpha)\qquad \begin{cases} dX_3 = \left\{ -\dfrac{D}{\sqrt{E}} X_1 + \left(\dfrac{FD - ED'}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \sqrt{E} \right) X_2 \right\} du + \\ + \left\{ \left(\pm \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} - \dfrac{D'}{\sqrt{E}} \right) X_1 + \left(\dfrac{FD' - ED''}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \mp \dfrac{F}{\sqrt{E}} \right) X_2 \right\} dv \\ d\overline{X}_3 = \left\{ -\dfrac{\overline{D}}{\sqrt{E}} \overline{X}_1 + \left(\dfrac{F\overline{D} - E\overline{D}'}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \pm \sqrt{E} \right) \overline{X}_2 \right\} du + \\ + \left\{ \left(\pm \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} - \dfrac{\overline{D}}{\sqrt{E}} \right) \overline{X}_1 + \left(\dfrac{F\overline{D}' - E\overline{D}''}{\sqrt{E}\sqrt{EG - F^2}} \pm \dfrac{F}{\sqrt{E}} \right) \overline{X}_2 \right\} dv \end{cases}$$

dove valgono i segni superiori. Nel caso (δ) valgono equazioni analoghe (10_δ) prendendo i segni inferiori. Le equazioni (10_β) relative al caso β [(10_γ) relative al caso γ] si ottengono prendendo nella prima [seconda] i segni superiori, nella seconda [prima] i segni inferiori. Dalle formule precedenti si deduce tosto che con convenzioni analoghe le (9) diventano:

$$(9_\alpha)\qquad D : D' \pm \sqrt{EG - F^2} = \overline{D} : \overline{D}' \pm \sqrt{EG - F^2}\,;\; D' \mp \sqrt{EG - F^2} : D'' = \\ = \overline{D}' \mp \sqrt{EG - F^2} : \overline{D}''$$

In tutti i quattro casi si deduce:

$$D'^2 - (EG - F^2) = \overline{D}'^2 - (EG - F^2) \text{ ossia } D'^2 = \overline{D}'^2 \text{ ossia } D' = \pm \overline{D}'$$

Cambiando eventualmente i segni della seconda forma fondamentale di una, o di ambedue le superficie T, U si vede che possiamo limitare lo studio al caso (α), che include in sè tutti gli altri.

E troviamo interpretando geometricamente le (9_α) (loc. cit., pag. 40):

A ogni coppia di superficie applicabili T, U *corrisponde sempre una superficie* S, *da cui essa si può dedurre coi nostri metodi.*

Le linee coordinate delle superficie applicabili T, U *corrispondenti alle assintotiche di* S *godono delle seguenti due proprietà* (che nello spazio euclideo spettano al sistema coniugato comune): *In punti corrispondenti di* T, U *sono uguali gli angoli formati dalle immagini piane delle linee suddette e sono pure uguali i prodotti delle loro curvature normali.*

Fisica matematica. — *Sull' influenza dei dielettrici solidi sul campo magnetico generato dalla convezione elettrica.* Nota II [1] di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

§ 2. È noto che quando un dielettrico omogeneo si introduce in un campo dato, si provoca sulla superficie del dielettrico una carica fittizia di cui è assegnabile il potenziale [2]. Indicando con ε_0 ed ε_1 le costanti dielettriche del vuoto e del coibente omogeneo adoperato, con **3** la componente secondo ζ della forza elettrica del campo prodottosi dopo l'introduzione del dielettrico, e relativa a punti interni allo strato, il potenziale della carica prodottasi sulla superficie dello strato dalla parte delle ζ positive, che indichiamo per il momento con σ_1 è

$$\chi = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\sigma_1}\frac{\mathbf{3}\,d\sigma}{r_1},$$

indicando r_1 le distanze da σ_1. Il potenziale della carica uguale ma di segno contrario prodottasi sulla faccia inferiore dello strato, che indichiamo con σ_2, è

$$\chi' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\sigma_2}\frac{\mathbf{3}\,d\sigma}{r_2},$$

[1] V. pag. 181.

[2] Vedi per es.: *Das elektromagnetische Feld: Vorlesungen* von Emil Cohn, pag. 99. Leipzig, 1900.

essendo r_2 le distanze da σ_2: perciò il potenziale resultante sarà

$$\chi + \chi' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_\sigma 3\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)d\sigma .$$

Se si indica con δ lo spessore uniforme ed assai piccolo dello strato dielettrico disteso sul piano σ, l'espressione del potenziale di doppio strato corrispondente alla polarizzazione del dielettrico viene ad essere

$$(11) \qquad \psi = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\delta}{4\pi\varepsilon_0}\int_\sigma 3\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\,d\sigma ,$$

essendo r le distanze dai punti di σ, e perciò il momento μ di esso ha l'espressione

$$(12) \qquad \mu = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\delta}{4\pi\varepsilon_0}3 = -\frac{l}{2\pi}3 ,$$

avendo posto $l = \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\delta}{2\varepsilon_0}$.

Ma dalle (2) si ha

$$3 = -\frac{d}{d\zeta}(F' + F_1) = -\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{\Delta} + F_2 + \psi\right) = -\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{\Delta} + F_2\right),$$

quindi tenendo conto delle (12) ed (8) si ha

$$(13) \qquad \psi_- = -2\pi\mu = l\,3 = -l\left\{\frac{dF_2}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{m}{\Delta}\right)\right\},$$

che è la condizione caratteristica della ψ relativa al piano σ. Altre due condizioni caratteristiche relative al piano σ si ottengono ricordando che per la legge di Ohm la corrente, che in esso si produce, è proporzionale alla componente tangenziale della forza elettrica, ed ha la stessa direzione. Indicando quindi con $\varkappa$ una costante di cui è noto il significato fisico (1), e con u_1 e v_1 le componenti della corrente indotta in σ, e distinguendo inoltre i valori delle funzioni sul piano σ, cioè dalla parte inferiore dello strato dielettrico, col segno —, avremo

$$X_- = A\varkappa u_1 \ , \ Y_- = A\varkappa v_1 .$$

Per le (2) e per le proprietà caratteristiche delle U_2, V_2, ψ avremo quindi:

$$\varkappa\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{dU_2}{d|\zeta|}\right] = -\frac{d}{d\xi}(F' + F_2 + \psi_-) + a\frac{d}{d\xi}(U' + U_2 + a\psi_-),$$

$$\varkappa\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{dV_2}{d|\zeta|}\right] = -\frac{d}{d\eta}(F' + F_2 + \psi_-) + a\frac{dV_2}{d\xi},$$

(1) Levi-Civita, Mem. cit. pag. 25.

ossia per la (1) si ottiene

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dU_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dU_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\xi}-(1-a^2)\dfrac{d\psi_-}{d\xi}=m(1-a^2)\dfrac{d\dfrac{1}{\Delta}}{d\xi}, \\ \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dV_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dV_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\eta}-\dfrac{d\psi_-}{d\eta}=m\dfrac{d\dfrac{1}{\Delta}}{d\eta}. \end{cases}$$

In definitiva le quattro incognite F_2, U_2, V_2, ψ, oltre alle equazioni indefinite (9) e (10) debbono soddisfare alle condizioni ai limiti (13) e (14). Derivando la (13) rispetto a ξ ed η, e sostituendo i valori di $\dfrac{d\psi_-}{d\xi}, \dfrac{d\psi_-}{d\eta}$ nella (14), si ricavano queste altre equazioni valevoli per i punti di σ:

$$(14)'\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dU_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dU_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\xi}+l(1-a^2)\dfrac{d^2F_2}{d\xi\, d|\zeta|}=m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{1}{\Delta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right], \\ \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dV_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dV_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\eta}+l\dfrac{d^2F_2}{d\eta\, d|\zeta|}=m\dfrac{d}{d\eta}\left[\dfrac{1}{\Delta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right]. \end{cases}$$

Da esse si deducono due altre valevoli in tutto lo spazio: per questo basta osservare che per le proprietà specifiche di $F_2\, U_2\, V_2$ i primi membri delle (14)′ sono funzioni regolari di $\xi\, \eta\, |\zeta|$ per $|\zeta| > 0$, verificanti la $\square f = 0$,

e riducentisi per $\zeta = 0$ a $m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{1}{\Delta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right], m\dfrac{d}{d\eta}\left[\dfrac{1}{\Delta}-l\dfrac{d\dfrac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right]$; lo

stesso avviene dei secondi membri, purchè in essi si muti ζ in $-|\zeta|$, con che si toglie la singolarità che presentano nel punto m.

Ma due funzioni aventi le proprietà accennate coincidono; ponendo quindi

$$(15)\qquad r^2 = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2],$$

si ha dalle (14)′ le equazioni

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dU_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dU_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\xi}+l(1-a^2)\dfrac{d^2F_2}{d\xi\, d|\zeta|}=m(1-a^2)\dfrac{d}{d\xi}\left[\dfrac{1}{r}-l\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{d|\zeta|}\right], \\ \dfrac{\varkappa}{2\pi}\dfrac{dV_2}{d|\zeta|}+a\dfrac{dV_2}{d\xi}-\dfrac{dF_2}{d\eta}+l\dfrac{d^2F_2}{d\eta\, d|\zeta|}=m\dfrac{d}{d\eta}\left[\dfrac{1}{r}-l\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{d|\zeta|}\right], \end{cases}$$

verificate in tutto lo spazio.

Si vede quindi come il problema è ridotto all'integrazione del sistema di equazioni

$$(17) \qquad \square F_2 = 0 \ , \ \square U_2 = 0 \ , \ \square V_2 = 0 \ , \ a \frac{dF_2}{d\xi} = \frac{dU_2}{d\xi} + \frac{dV_2}{d\eta}$$

e delle (16); quanto alla ψ dovendo soddisfare alla $\square \psi = 0$, alle solite condizioni di regolarità, ed assumere nei punti simmetrici rispetto a σ valori uguali e di segno contrario, non può essere altro che

$$(18) \qquad \psi = l \left\{ \frac{dF_2}{d\zeta} + m \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta} \right\},$$

la quale possiede appunto tutti i requisiti richiesti.

Derivando la prima delle (16) rispetto a ξ e la seconda rispetto a η, sommando e tenendo conto delle (17), si ha per F_2

$$\frac{a\varkappa}{2\pi} \frac{d^2F_2}{d\xi\, d|\zeta|} + \frac{d^2F_2}{d|\zeta|^2} - l \frac{d^3F_2}{d|\zeta|^3} = - m \frac{d^2}{d|\zeta|^2} \left[\frac{1}{r} - l \frac{d\frac{1}{r}}{d|\zeta|} \right],$$

la quale integrata rispetto a $|\zeta|$ da un valore qualunque sino all'infinito, tenendo conto che i due membri si annullano all'infinito, dà l'altra

$$(19) \qquad \frac{a\varkappa}{2\pi} \frac{dF_2}{d\xi} + \frac{dF_2}{d|\zeta|} - l \frac{d^2F_2}{d|\zeta|^2} = - m \frac{d}{d|\zeta|} \left[\frac{1}{r} - l \frac{d\frac{1}{r}}{d|\zeta|} \right].$$

Quando si riuscisse a determinare la F_2, soddisfacente a tutte le condizioni del problema, sarebbe agevole determinare poi la U_2 e V_2 dalle (16) e (17), le quali sono rispetto ad U_2 e V_2 equazioni identiche a quelle che si hanno nel caso considerato dal prof. Levi-Civita (1).

§ 3. Dal punto di vista pratico è sufficiente passare dalle equazioni differenziali alle approssimazioni, senza premetterne l'integrazione rigorosa. A tale scopo si osservi che essendo a il rapporto della velocità di traslazione della carica m alla velocità della luce nell'etere, e $\varkappa$ un trentesimo della resistenza dell'unità di superficie del piano conduttore σ, espressa in Ohm, si possono riguardare a e $\varkappa$ come quantità piccolissime, praticamente dello stesso ordine di grandezza (2), e quindi considerare $h = \frac{2\pi a}{\varkappa}$ come

(1) Mem. cit. pag. 28.
(2) Levi-Civita, Mem. cit. pag. 37.

un parametro finito. Riguardando anche l come una quantità finita, per quanto piccola, prendiamo a considerare quell'integrali F_2, U_2, V_2 che si comportano regolarmente per valori di a piccolissimi, e che si possono quindi sviluppare secondo le potenze di a, per a assai piccolo.

Ponendo

$$(20)\qquad \begin{cases} F_2 = f_0 + a f_1 + a^2 f_2 + \cdots, \\ U_2 = u_0 + a u_1 + a^2 u_2 + \cdots, \\ V_2 = v_0 + a v_1 + a^2 v_2 + \cdots; \\ \frac{1}{\nu} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{2} a^2 \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right) + \cdots \end{cases}$$

essendo $r'^2 = \xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2$, sostituiamo queste espressioni nelle (19), (16), (17) in cui si è sostituito $a\frac{2\pi}{h}$ per $\varkappa$, ed eguagliamo i coefficienti delle stesse potenze di a. Otterremo delle equazioni da cui possiamo ricavare le f, v, u, le quali poi, come funzioni di $\xi\,\eta\,|\zeta|$, debbono possedere tutte le caratteristiche proprie di $F_2\,U_2\,V_2$.

Consideriamo il caso che della a si possano trascurare le potenze superiori alla prima; osservando che la (19) e (16) si debbono scrivere

$$(19)'\qquad a^2\frac{dF_2}{d\xi} + h\frac{dF_2}{d|\zeta|} - l\,h\frac{d^2F_2}{d|\zeta|^2} = -\,m\,h\frac{d}{d|\zeta|}\left[\frac{1}{\nu} - l\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d|\zeta|}\right],$$

$$(16)'\qquad \begin{cases} a\frac{dU_2}{d|\zeta|} + ah\frac{dU_2}{d\xi} = h\frac{dF_2}{d\xi} - lh(1-a^2)\frac{d^2F_2}{d\xi\,d|\zeta|} + mh(1-a^2)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\nu} - l\frac{d\frac{1}{\nu}}{d|\zeta|}\right] \\ a\frac{dV_2}{d|\zeta|} + ah\frac{dV_2}{d\xi} = h\frac{dF_2}{d\eta} - l\,h\frac{d^2F_2}{d\eta\,d|\zeta|} + m\,h\frac{d}{d\eta}\left[\frac{1}{\nu} - l\frac{d\frac{1}{\nu}}{d|\zeta|}\right], \end{cases}$$

si riconosce che per poter valutare i termini in a di U_2 e V_2 è necessario tener conto del termine in a^2 di F_2. Si ottiene intanto dalla (19)', sostituendo ad F_2 ed $\frac{1}{\nu}$ i relativi sviluppi e tenendo conto sino dei termini in a^2, che deve essere

$$\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_0 - l\frac{df_0}{d|\zeta|}\right] = -\,m\frac{d}{d|\zeta|}\left[\frac{1}{r'} - l\frac{d\frac{1}{r'}}{d|\zeta|}\right],$$

$$\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_1 - l\frac{df_1}{d|\zeta|}\right] = 0,$$

$$\frac{df_0}{d\xi} + h\frac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 - l\frac{df_2}{d|\zeta|}\right] = -\frac{m\,h}{2}\frac{d}{d|\zeta|}\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{r'}\right) - l\frac{d^2}{d\xi\,d|\zeta|}\left(\frac{\xi}{r'}\right)\right],$$

mentre dalla (17) si ha

$$\Delta_2 f_0 = 0 \ , \ \Delta_2 f_1 = 0 \ , \ \Delta_2 f_2 = \frac{d^2 f_0}{d\xi^2} .$$

Si riconosce quindi che deve essere intanto

$$f_0 = -\frac{m}{r'} \ , \ f_1 = 0$$

restando a determinarsi f_2 dall'equazioni

$$(21) \quad \begin{cases} h \dfrac{d}{d|\zeta|}\left\{ f_2 + \dfrac{m}{2} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\xi}{r'}\right) - l \dfrac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 + \dfrac{m}{2} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\xi}{r'}\right)\right]\right\} = \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{m}{r'}\right), \\ \Delta_2 f_2 = - m \dfrac{d^2 \dfrac{1}{r'}}{d\xi^2} . \end{cases}$$

Osservando che, per $a = 0$, cioè supponendo la carica fissa, devono essere nulli i potenziali U_2 e V_2 si deduce senz'altro che deve essere $u_0 = 0$, $v_0 = 0$. Dalle (16)′ e dalle (17) tenendo conto dei valori già determinati si ricavano inoltre le relazioni

$$(22) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{d|\zeta|} + h \dfrac{du_1}{d\xi} + h \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{m}{r'}\right) = h \dfrac{d}{d\xi}\left\{ f_2 + \dfrac{m}{2} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\xi}{r'}\right) - l \dfrac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 + \dfrac{m}{2} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\xi}{r'}\right)\right]\right\}, \\ \dfrac{dv_1}{d|\zeta|} + h \dfrac{dv_1}{d\xi} = h \dfrac{d}{d\eta}\left\{ f_2 + \dfrac{m}{2} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\xi}{r'}\right) - l \dfrac{d}{d|\zeta|}\left[f_2 + \dfrac{m}{2} \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{\xi}{r'}\right)\right]\right\}, \end{cases}$$

$$(23) \qquad \Delta_2 u_1 = 0 \ , \ \Delta_2 v_1 = 0 \ , \ \frac{du_1}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\eta} + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{r'}\right) = 0 .$$

Derivando la prima delle (22) rispetto ad η e la seconda rispetto a ξ si trae

$$\frac{d^2 u_1}{d\eta\, d|\zeta|} + h \frac{d^2 u_1}{d\xi\, d\eta} + h \frac{d^2}{d\xi\, d\eta}\left(\frac{m}{r'}\right) = \frac{d^2 v_1}{d\xi\, d|\zeta|} + h \frac{d^2 v_1}{d\xi^2} ,$$

e quindi, per le (23), si ottiene

$$\frac{d^2 u_1}{d\eta\, d|\zeta|} - h \frac{d^2 v_1}{d\eta^2} = \frac{d^2 v_1}{d\xi\, d|\zeta|} + h \frac{d^2 v_1}{d\xi^2} ,$$

ossia

$$\frac{d^2 u_1}{d\eta\, d|\zeta|} + h \frac{d^2 v_1}{d|\zeta|^2} - \frac{d^2 v_1}{d\xi\, d|\zeta|} = 0 .$$

Questa integrata da un valore qualunque di $|\zeta|$ sino all'infinito, tenendo conto che i suoi termini all'infinito si annullano, dà l'altra

$$\frac{du_1}{\delta\eta} + h \frac{dv_1}{d|\zeta|} - \frac{dv_1}{d\xi} = 0 ,$$

la quale insieme alle (23) serve alla determinazione di u_1 e v_1. Ma a queste stesse equazioni e quindi alle stesse espressioni di u_1 e v_1 si giunge, coll'approssimazione considerata, anche nel caso in cui manca lo strato dielettrico sul piano conduttore σ (1). Di più si ha, giacchè si trascurano i termini in a^2, che è $F_2 = -\frac{m}{r'}$, quindi per la (18) è $\psi = 0$. Le componenti delle forze elettromagnetiche date dalle (2), (3) vengono quindi identiche a quelle che si hanno quando manca lo strato coibente. Il che ci permette di conchiudere che la presenza di un sottile strato dielettrico sul piano conduttore, quando si riguardano trascurabili le potenze di a superiori alla prima, non porta alterazione nel campo generato dalla carica mobile. Relativamente alle componenti della forza magnetica si può riconoscere anche facilmente che lo strato dielettrico non porta in esse alterazione, ancorchè ci si limiti a trascurare solo le potenze di a superiori alla seconda; infatti si ricava in modo simile al precedente che negli sviluppi (20) deve essere $f_3 = 0$, $u_2 = 0$, $v_2 = 0$, quindi le componenti delle forze magnetiche date dalle (3) rimangono le stesse di prima.

Per considerare il caso in cui lo strato dielettrico è disteso sul piano conduttore dalla parte delle ζ negative, basta mutare l in $-l$ nelle precedenti equazioni; si giunge quindi ad un resultato identico.

Meccanica. — *Sul problema dell'equilibrio elastico di un cilindro circolare indefinito.* Nota di O. Tedone, presentata dal Socio V. Volterra (2).

1. Ricordiamo che, secondo le indicazioni date in una mia Memoria degli Annali di matematica (3), quando sulla superficie di un corpo elastico, isotropo, in equilibrio, sono date le componenti u, v, w degli spostamenti, in un punto interno al corpo, di coordinate x, y, z, supposta nota la dilatazione θ, le u, v, w sono date dalle formole:

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma, \\ v = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma v\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}y\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \eta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma, \\ w = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma w\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \zeta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma. \end{cases}$$

In queste formole, come nella citata Memoria, σ è la superficie che limita il corpo elastico; n la normale a σ diretta verso l'interno; G la

(1) Levi-Civita, Mem. cit. pag. 30 e seg., o meglio vedi Nuovo Cimento, settembre 1903.

(2) Presentata nella seduta del 17 gennaio 1904.

(3) Tom. VIII, ser. III, pag. 129 e seg., *Saggio* ecc.

funzione di Green della quale, in questo lavoro, ci serviamo soltanto per rappresentare sinteticamente una funzione armonica che in superficie acquista certi valori; λ e μ sono le due costanti di Lamé e ξ, η, ζ le coordinate di un punto di σ. Ricordiamo, inoltre, che il problema dell'equilibrio elastico, consiste, principalmente, nel determinare la funzione armonica θ in modo che, nell'interno del corpo elastico, sia, in modo identico,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} . \tag{2}$$

2. Del problema che ora ci proponiamo di risolvere, daremo qui soltanto una indicazione sommaria, richiedendo l'esposizione completa di esso più spazio che non ci sia consentito.

Supponiamo dunque che la superficie cilindrica limitante il nostro corpo, sia indefinita da ambo le parti, abbia per asse l'asse x e indichiamo con R il raggio della sezione circolare. Introducendo un sistema di coordinate cilindriche x, l, ψ in modo che:

$$y = l\cos\psi \quad , \quad z = l\,\mathrm{sen}\,\psi , \tag{3}$$

per le note formole di Kirchhoff [1], potremo porre:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma &= \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_\nu(itl)}{\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}[u_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \\
&\quad + \bar{u}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi - x)\,d\xi , \\
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma v\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma &= \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_\nu(itl)}{\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}[v_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \\
&\quad + \bar{v}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi - x)\,d\xi , \\
\frac{1}{4\pi}\int_\sigma w\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma &= \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_\nu(itl)}{\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}[w_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \\
&\quad + \bar{w}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\varphi]\cos t(\xi - x)\,d\xi ,
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

in cui J_ν è la solita funzione di Bessel di prima specie e d'ordine ν e i l'unità immaginaria.

Le funzioni $u_\nu, \bar{u}_\nu$; $v_\nu, \bar{v}_\nu$; $w_\nu, \bar{w}_\nu$ di ξ si devono ritenere date e supponiamo che soddisfino alle condizioni di Dirichlet e si annullino all'infinito di ordine maggiore al primo; mentre i valori di u, v, w dati su σ, considerati come funzioni di ψ, si devono supporre sviluppabili in serie trigonometriche.

(1) Crelle, Journal f. M., Bd. 48, S. 348, *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen.*

Essendo θ una funzione armonica, potremo anche porre

$$(5)\qquad \theta = \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(it\mathrm{R})}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \bar\theta_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi - x)\,d\xi$$

ed il nostro problema consiste nel determinare le funzioni incognite θ_ν e $\bar\theta_\nu$ per mezzo delle funzioni u_ν, $\bar u_\nu$; v_ν, ... In quanto alle funzioni θ_ν e $\bar\theta_\nu$ noi supponiamo che soddisfino alle stesse condizioni delle funzioni u_ν, $\bar u_\nu$, ... La giustificazione di queste ipotesi si otterrebbe con la verifica della soluzione del problema, *a posteriori*.

Ora, dall'ipotesi che θ sia data dalla (5), discende che su σ dev'essere

$$\theta = \sum_0^\infty{}_\nu\,[\theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \bar\theta_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi],$$

quindi, su σ, si avrà ancora:

$$\eta\theta = \mathrm{R}\cos\psi\sum_0^\infty{}_\nu\,[\theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \bar\theta_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi] = \frac{\mathrm{R}}{2}\,\theta_0(\xi)\cos\psi + \frac{\mathrm{R}}{2}\sum_0^\infty{}_\nu\,\{[\theta_{\nu+1}(\xi) + \theta_{\nu-1}(\xi)]\cos\nu\psi + [\bar\theta_{\nu+1}(\xi) + \bar\theta_{\nu-1}(\xi)]\,\mathrm{sen}\,\nu\psi\}$$

$$\zeta\theta = \frac{\mathrm{R}}{2}\,\theta_0(\xi)\,\mathrm{sen}\,\psi + \frac{\mathrm{R}}{2}\sum_0^\infty{}_\nu\,\{[\theta_{\nu-1}(\xi) - \theta_{\nu+1}(\xi)]\,\mathrm{sen}\,\nu\psi - [\bar\theta_{\nu-1}(\xi) - \bar\theta_{\nu+1}(\xi)]\cos\nu\psi\},$$

purchè si ritengano $\bar\theta_0 = \theta_{-1} = \bar\theta_{-1} = 0$. Potremo perciò scrivere:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \xi\theta\,\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\,[\theta_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \bar\theta_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi - x)\,d\xi, \\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \eta\theta\,\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma = \frac{\mathrm{R}}{4\pi}\cos\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_1(itl)}{J_1(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_0(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi + \\ \qquad + \dfrac{\mathrm{R}}{4\pi}\displaystyle\sum_0^\infty{}_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\{[\theta_{\nu+1}(\xi) + \theta_{\nu-1}(\xi)]\cos\nu\psi + [\bar\theta_{\nu+1}(\xi) + \bar\theta_{\nu-1}(\xi)]\,\mathrm{sen}\,\nu\psi\}\cos t(\xi - x)\,d\xi, \\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \zeta\theta\,\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma = \frac{\mathrm{R}}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_1(itl)}{J_1(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_0(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi + \\ \qquad + \dfrac{\mathrm{R}}{4\pi}\displaystyle\sum_0^\infty{}_\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_\nu(itl)}{J_\nu(it\mathrm{R})}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\{[\theta_{\nu-1}(\xi) - \theta_{\nu+1}(\xi)]\,\mathrm{sen}\,\nu\psi - [\bar\theta_{\nu-1}(\xi) - \bar\theta_{\nu+1}(\xi)]\cos\nu\psi\}\cos t(\xi - x)\,d\xi. \end{cases}$$

Sostituendo questi risultati nelle equazioni (1) si ricavano i valori di u, v, w. Quindi, sostituendo i valori di u, v, w, così ottenuti, nell'equazione (2), riducendo il secondo membro della stessa equazione alla forma di Kirchhoff (ciò è possibile per essere questo secondo membro una funzione armonica, e lo scopo, del resto, si raggiunge subito applicando le più semplici proprietà delle funzioni di Bessel), eguagliando da ambo le parti i coefficienti di $\cos \nu\psi$ e di $\operatorname{sen} \nu\psi$ e poi facendo $l = \mathrm{R}$, si trovano le equazioni seguenti:

$$(7)\quad \theta_\nu(x) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{R}it \frac{\mathrm{J}'_\nu(it\mathrm{R})\left[\mathrm{J}_{\nu-1}(it\mathrm{R})\,\mathrm{J}_{\nu+1}(it\mathrm{R}) - \mathrm{J}^2_\nu(it\mathrm{R})\right]}{\mathrm{J}_{\nu-1}(it\mathrm{R})\,\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})\,\mathrm{J}_{\nu+1}(it\mathrm{R})}\, dt \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\nu(\xi) \cos t(\xi - x)\, d\xi = \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \left\{ u'_\nu(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{v_{\nu+1}(\xi) + \overline{w}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}(it\mathrm{R})} + \frac{\overline{w}_{\nu-1}(\xi) - v_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}(it\mathrm{R})} \right] \cos t(\xi - x)\, d\xi \right\}.$$

Le funzioni $\bar{\theta}_\nu$ soddisfano alle stesse equazioni salvo a mutare nel secondo membro u_ν, v_ν, w_ν in $\bar{u}_\nu, \bar{v}_\nu - \bar{w}_\nu$. Soltanto è da osservare che per $\nu = 1$ il secondo membro è leggermente diverso, mentre, per $\nu = 0$, l'equazione, pur rimanendo sempre dello stesso tipo, va leggermente modificata anche al primo membro.

3. Tutte queste equazioni sono del tipo

$$(8)\qquad \theta(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi) \cos t(\xi - x)\, d\xi = f(x)$$

dove $\varphi(t)$ ed $f(x)$ sono funzioni note e $\theta(x)$ la funzione da determinare. Inoltre, nel nostro caso $\varphi(t)$, oltre essere reale, è pari e si annulla tanto per $t = +\infty$ come per $t = -\infty$, come si trova subito considerando il valore assintotico di $\mathrm{J}_\nu(it\mathrm{R})$ che è

$$\frac{i^\nu}{\sqrt{2\pi\mathrm{R}}} \frac{e^{\mathrm{R}t}}{\sqrt{t}} \text{ per } t = +\infty \text{ e } \frac{i^\nu}{\sqrt{2\pi\mathrm{R}}} \frac{e^{-\mathrm{R}t}}{\sqrt{t}} \text{ per } t = -\infty.$$

Si proverebbe inoltre facilmente che $1 + \varphi(t)$ non si annulla mai al finito, mentre $f(x)$, in seguito alle condizioni imposte alle $u_\nu, \bar{u}_\nu$; $v_\nu, \ldots$, si annulla all'infinito positivo e negativo di ordine maggiore di uno; ma, per brevità, sopprimiamo questa dimostrazione.

Per determinare ora $\theta(x)$, moltiplichiamo ambo i membri della (8) per $\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\cos t(\xi - x)\, dt\, d\xi}{1 + \varphi(t)}$, dopo aver cambiato in essa x in ξ, ξ in ξ_1,

t in t_1, e integriamo due volte fra $-\infty$ e $+\infty$. Avremo così

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t(\xi-x)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\,dt_1\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi_1)\cos t_1(\xi_1-\xi)\,d\xi_1 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi\,.$$

Cangiando ora nel secondo termine del primo membro la variabile ξ in ξ' con la relazione $\xi=\xi'+\xi_1$, si trova, per questo secondo termine, l'espressione

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\,\frac{\varphi(t_1)}{1+\varphi(t)}\,\theta(\xi_1)\,[\cos\xi'(t-t_1)\cos t(\xi_1-x)+$$
$$+\operatorname{sen}\xi'(t-t_1)\operatorname{sen}t(x-\xi_1)]\,.$$

Se $\theta(x)$ soddisfa alle condizioni supposte, essa si deve annullare all'infinito positivo e negativo di ordine maggiore di uno ed allora, nell'espressione precedente, possiamo invertire l'ultimo integrale col terzo e col secondo e quindi possiamo porre questa espressione anche sotto la forma

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi_1)\cos t(\xi_1-x)\,d\xi_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\cos\xi'(t-t_1)\,dt_1 +$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi_1)\operatorname{sen}t(x-\xi_1)\,d\xi_1\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\operatorname{sen}\xi'(t-t_1)\,dt_1\,.$$

Ma

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\cos\xi'(t-t_1)\,dt_1=\varphi(t)\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1)\operatorname{sen}\xi'(t-t)\,dt_1=0\,,$$

quindi il primo membro della (9) diventa

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi=\theta(x)\,,$$

ed abbiamo la formola

$$(10) \qquad \theta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\varphi(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi$$

che soddisfa alle condizioni volute.

Questo risultato mostra che il nostro problema ha una soluzione ed una sola.

Aggiungiamo che, se $\varphi(t)$ non è pari, la formola d' inversione della (8) è la seguente

$$\theta(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2 + \varphi(t) + \varphi(-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos t(\xi - x)\, d\xi\,.$$

4. Accenniamo, più rapidamente ancora, al caso in cui in superficie sono date le tensioni.

Per i risultati della citata Memoria, supposto noti la dilatazione θ e le componenti della rotazione ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, le componenti degli spostamenti, in un punto interno al cilindro, saranno date dalle formole:

$$(11)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \mathrm{L}\mathrm{G}_1\, d\sigma - \dfrac{1}{4\pi\mathrm{R}}\int_\sigma (\eta\varpi_3 - \zeta\varpi_2)\,\mathrm{G}_1\, d\sigma - \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}\, x\theta - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \xi\frac{d\theta}{dn}\,\mathrm{G}_1\, d\sigma\,, \\ v = \dfrac{1}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \mathrm{M}\mathrm{G}_1\, d\sigma + \dfrac{1}{8\pi\mathrm{R}}\int_\sigma (\zeta\theta - 2\zeta\varpi_1)\,\mathrm{G}_1\, d\sigma - \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}\, y\theta - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \eta\frac{d\theta}{dn}\,\mathrm{G}_1\, d\sigma\,, \\ w = \dfrac{1}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \mathrm{N}\mathrm{G}_1\, d\sigma + \dfrac{1}{8\pi\mathrm{R}}\int_\sigma (\zeta\theta + 2\eta\varpi_1)\,\mathrm{G}_1\, d\sigma - \dfrac{\lambda+\mu}{2\mu}\, z\theta - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \zeta\frac{d\theta}{dn}\,\mathrm{G}_1\, d\sigma\,, \end{cases}$$

per essere su σ: $\cos n\xi = 0$, $\cos n\eta = -\dfrac{\eta}{\mathrm{R}}$, $\cos n\zeta = -\dfrac{\zeta}{\mathrm{R}}$. E ricordiamo che, in queste formole, L, M, N rappresentano le componenti delle tensioni date in superficie e G_1 quella funzione che ora, molto opportunamente, si vuole chiamare funzione di Neumann e che serve a risolvere il problema della determinazione della funzione armonica la cui derivata normale acquista in superficie dati valori. Il nostro problema, come si sa, consiste nel determinare θ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 in modo che sieno verificate identicamente le relazioni:

$$(12)\quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\;;\; 2\varpi_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\,,\; 2\varpi_2 = \cdots$$

Perciò poniamo:

$$(13)\quad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{L}\mathrm{G}_1\, d\sigma = -\frac{i}{2\pi}\sum_0^\infty{}'_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{J}_\nu(itl)}{\mathrm{J}'_\nu(it\mathrm{R})}\,\frac{dt}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{L}_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \\ + \overline{\mathrm{L}}_\nu(\xi)\,\mathrm{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi - x)\, d\xi\,,$$

mentre $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma MG_1\,d\sigma$, $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma NG_1\,d\sigma$ saranno rappresentate dalla stessa formola dove al posto di L_ν, $\overline{L}_\nu$ si pongano rispettivamente le funzioni M_ν, $\overline{M}_\nu$; N_ν, $\overline{N}_\nu$ che, come le L_ν, $\overline{L}_\nu$, noi supponiamo date.

Poniamo ora, ipoteticamente, per i valori di θ ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 su σ:

$$\theta = \sum_0^\infty{}_\nu\,[\theta_\nu(\xi)\,\text{cos}\,\nu\psi + \overline{\theta}_\nu(\xi)\,\text{sen}\,\nu\psi]\,; \tag{14}$$

$$\varpi_i = \sum_0^\infty{}_\nu\,[\varpi_{i,\nu}(\xi)\,\cos\nu\psi + \overline{\varpi}_{i,\nu}(\xi)\,\text{sen}\,\nu\psi] \qquad i = 1\,,\,2\,,\,3\,.$$

Si potranno allora costruire le formole di Kirchhoff che ci danno θ ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 nell'interno del cilindro. Dal valore di θ così costruito si deduce in particolare che su σ

$$\frac{d\theta}{dn} = -\frac{\partial\theta}{\partial l} = -\frac{i}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta_\nu(\xi_1)\cos\nu\psi + \tag{15}$$

$$+\,\overline{\theta}_\nu(\xi_1)\,\text{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi_1 - \xi)\,d\xi_1\,.$$

Come nel primo caso si potranno poi costruire le espressioni di

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\theta\,G_1\,d\sigma\,,\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\theta\,G_1\,d\sigma\,;\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\varpi_1\,G_1\,d\sigma\,,\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\varpi_1\,G_1\,d\sigma\,;\ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma (\eta\varpi_3 - \zeta\varpi_2)\,G_1\,d\sigma$$

e tenendo presente la (15) si stabiliscono facilmente anche le formole seguenti:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \xi\frac{d\theta}{dn}\,G_1\,d\varrho = -x\theta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J_\nu(itl)}{t\,J'_\nu(itR)}\right) dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta'_\nu(\xi)\cos\nu\psi + \\
&\qquad + \overline{\theta}'_\nu(\xi)\,\text{sen}\,\nu\psi]\cos t(\xi - x)\,d\xi\,, \\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \eta\frac{d\theta}{dn}\,G_1\,d\sigma = \\
&\quad = \frac{R}{2\pi}\cos\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J'_0(itR)}{J_0(itR)}\,\frac{J_1(itl)}{J'_1(itR)}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(\xi)\cos t(\xi - x)\,d\xi + \\
&\quad + \frac{R}{4\pi}\sum_1^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\,\frac{J_{\nu+1}(itl)}{J'_{\nu+1}(itR)}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta_\nu(\xi)\cos(\nu+1)\,\psi + \\
&\qquad + \overline{\theta}_\nu(\xi)\,\text{sen}(\nu+1)\,\psi]\cos t(\xi - x)\,d\xi + \\
&\quad + \frac{R}{4\pi}\sum_1^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J'_\nu(itR)}{J_\nu(itR)}\,\frac{J_{\nu-1}(itl)}{J'_{\nu-1}(itR)}\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} [\theta_\nu(\xi)\cos(\nu-1)\,\psi + \\
&\qquad + \overline{\theta}_\nu(\xi)\,\text{sen}(\nu-1)\,\psi]\cos t(\xi - x)\,d\xi\,,
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

e una formola analoga per $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\frac{d\theta}{dn}\,d\sigma$.

Sostituendo questi risultati nelle (11) e quindi i valori di u, v, w, così trovati nella prima e nella seconda delle (12), quindi cercando di soddisfare ad esse identicamente e ponendo $l = \mathrm{R}$, si trova, trascurando di scrivere nelle funzioni di Bessel l'argomento comune $it\mathrm{R}$:

$$(17)\qquad \theta_\nu(x) - \frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda+\mu)\,\mathrm{R}it\left[2\,\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}\left(1+\frac{\nu^2}{\mathrm{R}^2t^2}\right)+\mathrm{J}'^2_{\nu}\,(\mathrm{J}'_{\nu-1}-\mathrm{J}'_{\nu+1})\right]+\mu\,\mathrm{J}_\nu\,\mathrm{J}'_\nu\,(\mathrm{J}'_{\nu-1}-\mathrm{J}'_{\nu+1})}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_\nu\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\nu(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi -$$

$$-\frac{i\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_\nu}{\mathrm{J}'_\nu}\frac{dt}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}[\varpi'_{3,\nu-1}(\xi)+\varpi'_{3,\nu+1}(\xi)+\overline{\varpi}'_{2,\nu-1}(\xi)-\overline{\varpi}'_{2,\nu+1}(\xi)]\cos t(\xi-x)\,d\xi -$$

$$-\frac{\mu}{4\pi(\lambda+2\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{J}_\nu(\mathrm{J}'_{\nu-1}+\mathrm{J}'_{\nu+1})}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varpi}_{1,\nu}(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi =$$

$$=-\frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2i\,\frac{\mathrm{L}'_\nu(\xi)}{t\,\mathrm{J}'_\nu}-\frac{\mathrm{M}_{\nu+1}(\xi)+\overline{\mathrm{N}}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu+1}}+\frac{\mathrm{M}_{\nu-1}(\xi)-\overline{\mathrm{N}}_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu-1}}\right]\times$$

$$\times\cos t(\xi-x)\,d\xi,$$

. . . . . .

$$(18)\quad 2\varpi_{1,\nu}(x)-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_\nu\,\frac{\mathrm{J}'_{\nu-1}-\mathrm{J}'_{\nu+1}}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\varpi_{1,\nu}(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi = \nu\,\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,\overline{\theta}_\nu(x) -$$

$$-\frac{1}{8\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}[\mu\,\mathrm{J}_\nu+(\lambda+\mu)\,\mathrm{R}it\,\mathrm{J}'_\nu]\,\frac{\mathrm{J}'_{\nu-1}+\mathrm{J}'_{\nu+1}}{\mathrm{J}'_{\nu-1}\,\mathrm{J}'_{\nu+1}}\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\theta}_\nu(\xi)\cos t(\xi-x)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{8\pi\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\mathrm{M}}_{\nu+1}(\xi)-\mathrm{N}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu+1}}+\frac{\overline{\mathrm{M}}_{\nu-1}(\xi)+\mathrm{N}_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}'_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi,$$

. . . . . .

Le equazioni (18) mostrano che $\varpi_{1,\nu}$, $\overline{\varpi}_{1,\nu}$ sono determinate appena sieno note le θ_ν, $\overline{\theta}_\nu$ e ci possiamo servire di queste stesse equazioni per eliminare le $\varpi_{1,\nu}, \overline{\varpi}_{1,\nu}$ dalle (17). Per eliminare dalle (17) anche le $\varpi_{2,\nu}, \overline{\varpi}_{2,\nu}$; $\varpi_{3,\nu}, \overline{\varpi}_{3,\nu}$, e quindi poter determinare le $\theta_\nu, \overline{\theta}_\nu$, il metodo più semplice è il seguente. Cercando di soddisfare identicamente alle equazioni:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+2\mu\left(\frac{\partial\varpi_3}{\partial x}-\frac{\partial\varpi_1}{\partial z}\right)=0\ ,\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+2\mu\left(\frac{\partial\varpi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varpi_2}{\partial x}\right)=0$$

con i valori presunti di θ; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$, si trovano le equazioni seguenti:

$$(19)\quad \begin{cases} \varpi'_{3,\nu}(x) = -\dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\theta_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}-\frac{\theta_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi + \\ \qquad +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}+\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi, \\ \overline{\varpi}'_{3,\nu}(x) = -\dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\theta}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}-\frac{\overline{\theta}_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi - \\ \qquad -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varpi_{1,\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}+\frac{\varpi_{1,\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \varpi'_{2,\nu}(x) = \dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\theta}_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}+\frac{\overline{\theta}_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi + \\ \qquad +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\varpi_{1,\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}-\frac{\varpi_{1,\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi, \\ \overline{\varpi}'_{2,\nu}(x) = -\dfrac{\lambda+2\mu}{8\pi\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\theta_{\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}+\frac{\theta_{\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi + \\ \qquad +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\mathrm{J}_\nu\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu+1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu+1}}-\frac{\overline{\varpi}_{1,\nu-1}(\xi)}{\mathrm{J}_{\nu-1}}\right]\cos t(\xi-x)\,d\xi, \end{cases}$$

le quali mostrano che l'espressione

$$\varpi'_{3,\nu-1}(\xi)+\overline{\varpi}'_{2,\nu-1}(\xi)+\varpi'_{3,\nu+1}(\xi)-\overline{\varpi}'_{2,\nu+1}(\xi),$$

per mezzo della quale le $\varpi_{2,\nu}$, $\overline{\varpi}_{2,\nu}$; $\varpi_{3,\nu}$, $\overline{\varpi}_{3,\nu}$ entrano nella (17), dipende da θ_ν e $\overline{\varpi}_{1,\nu}$. Inoltre le (19) e (20) mostrano che determinate le θ_ν e $\overline{\theta}_\nu$, non solo restano determinate le $\varpi_{1,\nu}$, $\overline{\varpi}_{1,\nu}$, ma anche le $\varpi_{2,\nu}$, $\overline{\varpi}_{2,\nu}$; $\varpi_{3,\nu}$, $\overline{\varpi}_{3,\nu}$, ed il problema è risoluto completamente.

5. Per ragioni di spazio non ho potuto dar qui le formole definitive. Mi contenterò di aggiungere le osservazioni seguenti: 1°, se nel primo problema si suppone $u=0$ e v, w indipendenti da ξ, e nel secondo $\mathrm{L}=0$, M ed N indipendenti da ξ, le formole trovate ci danno le soluzioni di corrispondenti problemi di equilibrio di un cerchio elastico; 2°, scambiando le funzioni di Bessel di prima specie con quello di seconda specie, si ottengono le soluzioni di problemi di equilibrio elastico per lo spazio indefinito, esterno al cilindro; 3°, molti altri problemi si possono risolvere seguendo la stessa via; accennerò soltanto ai problemi di equilibrio elastico per lo spazio compreso fra due piani paralleli di cui ho dato delle soluzioni, fondate su principii differenti, in una Memoria che vedrà presto la luce negli Annali di Matematica.

Matematica. — *Sopra la equazione di Kepler.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio V. Volterra.

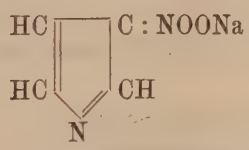
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sopra il Nitroindolo* (1). Nota di F. Angelico e G. Velardi, presentata dal Corrispondente A. Angeli.

Alcuni anni or sono il prof. Angeli (2) studiando l'azione del nitrato d'etile sull'idrossilammina, in presenza di etilato sodico, potè facilmente trasformarla nel suo derivato nitrico corrispondente.

Questa reazione, come hanno dimostrato le ulteriori ricerche, è di indole molto generale e presenta un mezzo per nitrare alcune sostanze le quali, dall'acido nitrico, vengono o distrutte o trasformate in derivati polinitrici. Le serie del pirrolo e dell'indolo ci offrono un esempio molto istruttivo. Infatti finora non era stato possibile ottenere il derivato nitrico del pirrolo, giacchè esso vien completamente distrutto dall'acido nitrico ed i pochi nitroderivati conosciuti in questa serie, ordinariamente polinitrici, sono stati ottenuti per via indiretta, cioè introducendovi dapprima radicali negativi (3).

D'altra parte gli omologhi dell'indolo danno origine, per azione dell'acido nitrico, con rendimenti scarsi, a derivati in cui almeno un residuo nitrico appartiene al nucleo aromatico (4). Era quindi d'interesse estendere lo studio di questa reazione, impiegata in seguito con successo dal Thiele (5) per la preparazione del nitrociclopentadiene e da W. Wislicenus e A. Endres (6) per nitrare l'etere fenilacetico ed il cianuro di benzile, all'indolo ed ai suoi omologhi, seguendo esattamente il metodo che, due anni or sono, condusse uno di noi (7) alla preparazione del sale sodico dell'acido pirrolnitronico:



(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica Farmaceutica della R. Università di Palermo.

(2) Angeli, Gazzetta Chimica 1896, II, 17.

(3) Ciamician, *Il pirrolo ed i suoi derivati.* Acc. Lincei 1888.

(4) Zatti, Gazzetta Chimica XIX, II, 261.

(5) Thiele, Berlin. Berichte 33, 670.

(6) Wislicenus e Andres, Berlin. Berichte 35, 1755, 1757.

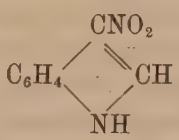
(7) Angeli e Angelico, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 2° sem. 1902, pag. 16-17.

Alla soluzione di una molecola dell' indolo, in etere assoluto, si aggiunge un atomo di sodio in fili, una molecola di nitrato d'etile e qualche goccia di alcool. Si chiude la bevuta con tubo a cloruro di calcio e si lascia in riposo in luogo fresco; dopo uno o più giorni comincia a separarsi il sale sodico dell'acido nitronico e quando tutto il sodio è scomparso la reazione è completa. Si versa in acqua e dopo aver separato lo strato etereo, il liquido acquoso si sottopone all'azione dèll'anidride carbonica che separa l'acido nitronico libero.

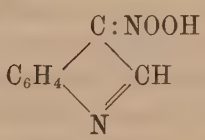
Operando in tal modo abbiamo ottenuto il

β-nitroindolo

che cristallizzato dal benzolo si presenta in aghetti giallognoli che fondono a 210°; ad esso spetta la formula:



ovvero la tautomera



gr. 0,1148 di sostanza fornirono cc. 17 di azoto alla temperatura di 17° ed alla pressione di 747 mm. (corretta).

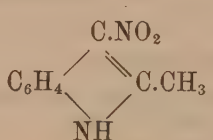
In 100 parti

	Trovato	Calcolato per $C_8H_6N_2O_2$
N	17,21	17,28.

Il

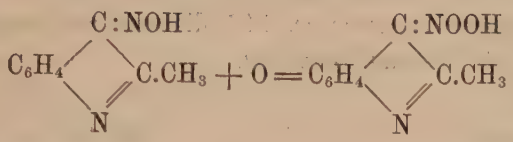
β-nitrometilindolo

si presenta in magnifiche squame gialle con riflessi metallici violetti; fonde verso 248° e gli spetta la formola:



Esso è identico al prodotto ottenuto, quattro anni or sono, per ossidazione

del nitrosometilindolo (1), in soluzione alcalina, con permanganato potassico



gr. 0,1356 di sostanza fornirono cc. 18,2 di azoto alla temperatura di 16° ed alla pressione di 752 mm. (corretta).

In 100 parti

	Trovato	Calcolato per $C_9H_8N_2O_2$
N	15,74	15,90

Trattandosi di reazione nuova e che conduce a sostanze anch'esse nuove, era interessante vedere se effettivamente i prodotti, in tal modo preparati, si potessero considerare come veri nitroderivati.

Questo scopo potemmo raggiungerlo in due modi. Da una parte trattando con acido nitrico il nitrometilindolo (che si ottiene pure ossidando il nitrosometilindolo) pervenimmo al

dinitrometilindolo

preparato da Zatti (2) per azione diretta dell'acido nitrico sopra il metilindolo.

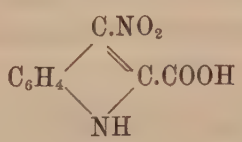
Gr. 0,0833 di sostanza fornirono cc. 13,3 di azoto alla temperatura di 16° ed alla pressione di 755 mm. (corretta).

In 100 parti

	Trovato	Calcolato per $C_9H_7N_3O_4$
N	18,69	19,00

Secondariamente ci fu possibile arrivare al nitroindolo dal nitrometilindolo stesso. In questa sostanza infatti (come anche il nitrosoindolo) per ossidazione con camaleonte, il metile diventa carbossile, e fornisce un composto il quale è da considerarsi come

acido nitroindolcarbonico



(1) Angeli e Angelico, Gazzetta Chimica, XXX, II, 270.

(2) Zatti, Gazzetta Chimica, XIX, II, 261.

che cristallizzato dallo xilolo si presenta in bellissime squamette colorate intensamente in giallo che fondono con decomposizione a 230°.

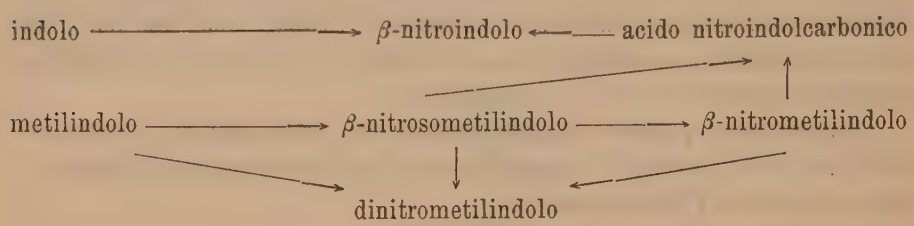
Gr. 0,1234 di sostanza fornirono cc. 14,5 di azoto alla temperatura di 21° ed alla pressione di 750 mm. (corretta).

In 100 parti

	Trovato	Calcolato per $C_9H_6N_2O_4$
N	13,50	13,58

Riscaldato verso 240° la decomposizione procede in maniera rapidissima e sublima una sostanza, in aghetti lucenti, che cristallizzata dal benzolo fonde a 210° ed è identica al nitroindolo che preparammo per l'altra via.

Il seguente schema illustra queste trasformazioni:



Nella Gazzetta Chimica faremo seguire la descrizione particolareggiata delle esperienze che si riferiscono a questa comunicazione.

Mineralogia — *Su alcune blende di Sardegna.* Nota del dott. C. Rimatori, presentata dal Socio G. Strüver.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Corrispondenti Righi, Lustig, e dei Soci stranieri C. Klein, Sorauer. Fa inoltre particolare menzione del *Traité d'analyse des substances minérales* di A. Carnot; di alcuni volumi della *Collection de Mémoires relatifs à la Physique*, pubblicati dalla Società francese di fisica; e di un *Rapporto del Comitato degli scogli corallini* alla Società Reale di Londra.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

L'Accademia delle scienze di Nuova York; la Società Reale di Londra; le Società geologiche di Sydney e di Calcutta; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società zoologica di Tokyo; la Società di scienze naturali di Braunschweig; il Museo di storia naturale di Nuova York; l'Istituto Smithsoniano di Washington; l'Osservatorio di San Fernando; la Biblioteca Reale di Berlino.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 marzo 1904.

Abderhalden E. — Die Monoaminosäuren des Salmins. Strassburg, 1904. 8°.

Id. — Die schwefelhaltigen Abbauprodukte der Eiweisskörper und deren Konstitution. Berlin, 1904. 8°.

Id. — Verhalten des Körpereiweisses im Hunger. Strassburg, 1904. 8°.

Barnet E. B. — La peste bubónica. Cònferencia. Habana, 1903. 8°.

Brough B. H. — The Mining of non -metallic Minerals. London, 1904. 8°.

Carnot A. — Traité d'analyse des substances minérales. Tome second. Métalloïdes. Paris, 1904. 8°.

Commission française des Glaciers. *Girardin P.* — Sur les observations glaciaires en Haute-Maurienne, dans les Grandes-Rousses et l'Oisans, dans l'été de 1902. — *Rabot C.* — Revue de Glaciologie. N. 2, année 1902. Paris, 1903. 8°. — *Id.* — Observations sur l'enneigement et sur les chutes d'avalanches, exécutées par l'Administration des Forêts dans les Départements de la Savoie, Paris, 1903. 4°.

Finlay C. J. — Informe sanitario y demografico del Termine municipal de la Habana, correspondiente al año 1902, y presentado al Secretario de Gobernacion L. E. Yero Buduén. S. l. 1903. 4°.

Hepites S. C. — Cutremurele de Panûnt din România în anul 1902 st. n. şi în deceniul 1893-1902. Bucuresci, 1903. 4°.

Klein (*v. C.*). — Die Meteoritensammlung der Königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 21 Januar 1904. Berlin, 1904. 8°.

Luigioni P. — Sul *Carabus Ullrichi* Germ. del Museo Geologico di Napoli. Napoli, 1904. 8°.

Lustig A. — I metodi razionali di immunizzazione per mezzo di sostanze chimicamente estratte dai microrganismi patogeni. Milano, 1903. 8°.

Manville M. O. — Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

1re Thèse. Sur la déformation finie d'un milieu continu.

2e Thèse. Propositions données par la Faculté.

Bordeaux, 1903. 8°.

Monfallet D. — Bibliographie abrégée des infections. Paris etc., 1903. 8°.

Id. — Études d'Anatomie pathologique et de Bactériologie comparée. Santiago de Cuba, 1901. 8°.

Neviani A. — Luigi Bombicci. Commemorazione. Roma, 1903. 8°.

Righi A. — La moderna teoria dei fenomeni fisici. (Radioattività, Joni, Elettroni). Bologna, 1904. 8°.

Sorauer P. — Zur anatomischen Analyse der durch saure Gase beschädigten Pflanzen. Berlin, 1903. 8°.

Sacco F. — Esame geologico comparativo di due progetti di linee ferroviarie attraverso l'Appennino Ligure (con annesse carte e sezioni geologiche). Genova, 1903. 4°.

Société française de Physique. — Collection de Mémoires relatifs à la Physique. Tomes I-V. Paris, 1884-1891. 8°.

R. Society of London. — The Atoll of Funafuti, Borings into a coral Reef and the Results. Being the Report of the coral Reef Committee (con atlante). London, 1904. 4°.

Tarroja y Caballé E. — Teoria geometrica de las líneas alabeadas y de las superficies desarrollables. Madrid, 1904. 8°.

Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten. Organ für die Gesammtinteressen des Pflanzenschutzes. XIII Band. I-VI Heft. Stuttgart, 1903-1904. 8°.

V. C.

Series 5.1904-03-20: Vol 13
Part 1

I-ARCHIVE